

Семинар 5. Собственные векторы и числа

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Докажите, что для любых двух квадратных матриц выполнено тождество:

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

(б) Существуют ли две квадратные матрицы A и B , для которых выполнено тождество:

$$AB - BA = I?$$

(в) Докажите, что характеристический многочлен $\chi_A(t)$ матрицы A размера $n \times n$ имеет вид:

$$\chi_A(t) = (-1)^n(t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n),$$

где $a_1 = \operatorname{tr}(A)$, а $a_n = \det(A)$.

(г) Найдите явную формулу, выражающую коэффициенты характеристического многочлена $\chi_A(t)$ через коэффициенты матрицы A для 3×3 матрицы A .

Задача 2. (а) Докажите, что собственные значения вещественной симметрической матрицы размера 2×2 вещественны.

(б) Докажите, что вещественная матрица нечетного размера имеет вещественное собственное значение, а четного — не обязательно.

Задача 3. Операторы на \mathbb{R}^3 заданы в стандартном базисе матрицами:

$$(а) \begin{pmatrix} 10 & 16 & 11 \\ -4 & -6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad (в) \begin{pmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Какие из этих операторов диагонализуются?

Задача 4. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $T : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ на пространстве многочленов, если T переводит многочлен $f(x)$ в многочлен:

$$(а) f'(x); \quad (б) x f'(x); \quad (в) (x+1) f'(x); \quad (г) f(x+1) - f(x).$$

Задача 5. Для вещественной 2×2 -матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ найдите собственные числа и собственные значения оператора M_A на пространстве 2×2 -матриц, действующего по формуле

$$M_A : X \mapsto AX.$$

Задача 6. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ , а минимальный μ , где

$$(а) \chi = t^6 - 1, \mu = t^3 - 1; \\ (б) \chi = (t-1)^2(t-2)^2, \mu = (t-1)(t-2); \\ (в) \chi = (t-1)^5(t-2)^5, \mu = (t-1)^2(t-2)^3?$$

Задача 7. Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n); \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n .