Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 6. Инвариантные подпространства

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Является ли $\mathbb{R}^4$ прямой суммой подпространств U_1 и U_2, где
(а) $U_1 = \langle(1,1,1,1)\rangle$, $U_2 = \langle(1,2,3,4),(1,3,2,4),(4,3,2,1)\rangle$;
(б) $U_1 = \langle(1,1,1,1),(1,2,3,4)\rangle$, $U_2 = \langle(1,4,3,2),(1,3,2,4)\rangle$?

Задача 2. Пусть U_1 и U_2 — подпространства в векторном пространстве V. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
(1) $V = U_1 \oplus U_2$ (то есть каждый вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде суммы $v = u_1 + u_2$, где $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$).
(2) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ и $U_1 + U_2 = V$.
(3) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$ и $U_1 + U_2 = V$.
(4) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Задача 3. Опишите все инвариантные подпространства оператора $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного в некотором базисе матрицей

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix};\quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix};\quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

(г) Известно, что у оператора $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ бесконечно много попарно различных инвариантных подпространств. Докажите, что найдётся инвариантная плоскость, в ограничении на которую T является гомотетией.

Задача 4. Известно, что у оператора $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть инвариантная плоскость Π, содержащая единственный с точностью до пропорциональности собственный вектор v оператора T. Придумайте алгоритм построения жорданова базис оператора $T|_\Pi$.

Задача 5. Найдите собственные значения, собственные и корневые подпространства оператора T на вещественном векторном пространстве V, заданного в некотором базисе матрицей

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix};\quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix};\quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix};\quad \text{(г)}\ \begin{pmatrix}0&-2&3&2\\1&1&-1&-1\\0&0&2&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

В каждом случае проверьте непосредственно, что V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств оператора T.

Задача 6. Найдите минимальные многочлены всех операторов из предыдущей задачи, их жорданову нормальную форму и жорданов базис.

Задача 7. (а) Характеристический многочлен оператора равен $(t-\lambda)^3(t-\mu)^4$. Как может выглядеть жорданова нормальная форма такого оператора?
(б) Характеристический многочлен оператора равен $(t-2)^5(t-4)^7$. Найдите его жорданову нормальную форму, если известно, что все блоки имеют размер 2 или 3.

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2020 г.

Домашнее задание 3. Срок сдачи 10 февраля.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите все собственные и корневые подпространства оператора на $\mathbb{R}^3$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Характеристический многочлен некоторого оператора равен $(t-1)^2(t-2)^2$, а минимальный равен $(t-1)^2(t-2)$. Какой вид может иметь жорданова нормальная форма этого оператора?

Задача 3. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax+1).$$

Найдите все собственные и корневые подпространства оператора T_a для каждого $a \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Рассмотрим $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Определим оператор $M_a : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ умножения на $a \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ формулой:

$$M_a : x \mapsto ax.$$

Найдите характеристический многочлен оператора M_a для $a = 1 + \sqrt[3]{2}$.

Задача 5. Минимальный многочлен оператора T равен $(t-1)(t-2)$. Докажите, что корневое подпространство $V^{(1)}$ оператора T совпадает с образом оператора $T - 2I$.