Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 10. Конкретные группы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Выпишите таблицу умножения в группе

(а) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$; (б) $((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*, \times)$; (в) S_3.

(Напомним, что через $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ обозначается кольцо вычетов по модулю n, а через $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ подмножество всех его обратимых относительно умножения элементов.)

Задача 2. (а) Опишите все симметрии квадрата $A_1A_2A_3A_4$, то есть все такие движения плоскости, которые переводят квадрат в себя (как множество, а не поточечно).

(б) Группа симметрий квадрата действует на множестве $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ вершин квадрата. Опишите все перестановки вершин, которые получаются в результате такого действия.

Задача 3. Пусть G — группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих куб.

(а) Рассмотрим три действия группы G: на множестве вершин, рёбер и граней куба. Для каждого действия найдите все орбиты и стабилизаторы.

(б) Найдите порядок группы G.

(в) Докажите, что G изоморфна S_4.

Задача 4. Найдите все пары изоморфных групп в следующем списке (через R^* обозначается множество обратимых относительно умножения элементов кольца R):

$$(1)\ ((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times);\quad (2)\ ((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*, \times);\quad (3)\ (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +);$$
$$(4)\ (\mathbb{Q}^*, \times);\quad (5)\ (\mathbb{Q}, +);\quad (6)\ (\mathbb{R}^+, \times);\quad (7)\ (\mathbb{R}, +).$$

Задача 5. Группа движений плоскости действует на множестве треугольников.

(а) Найдите орбиты этого действия.

(б) Для каждого треугольника найдите его стабилизатор (=группу симметрий).

(в) Постройте изоморфизм между группой перестановок S_3 и группой симметрий равностороннего треугольника.

Задача 6. (а) Изоморфны ли $\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{C}^*$ как группы по умножению?

(б)* Изоморфны ли $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ как группы по сложению?

Задача 7. Рассмотрим действие группы $G = GL_2(\mathbb{C})$ сопряжениями на множестве всех 2×2 матриц (это означает, что элемент $g \in G$ переводит матрицу A в gAg^{-1}). Опишите все орбиты этого действия. Для каждой матрицы найдите её стабилизатор.

Задача 8. Симметрическая группа S_n действует на множестве всех многочленов $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ от n переменных по правилу:

$$\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

для $\sigma \in S_n$ и $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Проверьте, что это действительно действие. При $n = 3$ найдите орбиты и стабилизаторы многочленов:

(а) x_1x_2; (б) $x_1x_2x_3$; (в) $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$.

Задача 9. Существует ли нециклическая группа порядка

(а) 2; (б) 3; (в) 4?

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Домашнее задание 4. Срок сдачи 24 февраля.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора на $\mathbb{R}^4$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -6 & 9 \\ 3 & 3 & -7 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Нильпотентный оператор $N : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ удовлетворяет условиям:

$$\dim \operatorname{Ker}(N) = 3; \quad \dim \operatorname{Ker}(N^2) = 6.$$

Найдите его жорданову нормальную форму.

Задача 3. Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора на $\mathbb{C}^n$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Как может выглядеть жорданова нормальная форма матрицы размера $n \times n$, если ранг матрицы равен единице?

Задача 5. На завтрак Белоснежка налила семи гномам молока. Первый гном распределил молоко из своей кружки поровну между остальными гномами (себе ничего не оставил). Затем то же самое проделал второй гном, третий, и так далее, до седьмого гнома включительно. В конце у каждого гнома оказалось ровно столько молока, сколько ему вначале налила Белоснежка. Можно ли определить однозначно, сколько молока у каждого гнома, если всего молока 42 унции?