Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 11. Абстрактные группы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Докажите, что при гомоморфизме групп $\varphi : G \to H$ всегда выполнено условие
$$\varphi(e_G) = e_H,$$
то есть единичный элемент группы G переходит в единичный элемент группы H.

Задача 2. (а) Обозначим через s_i элементарную транспозицию $(i\ i+1)$. Проверьте, что в симметрической группе S_n выполняются соотношения:

(1) $s_i^2 = e$ для всех $i = 1,\dots, n-1$;
(2) $s_i s_j = s_j s_i$ при $|i-j| \geq 2$ (*дальняя коммутативность*);
(3) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ для всех $i = 1,\dots, n-2$ (*соотношение группы кос*).

(б*) В некоторой группе G все элементы представляются в виде произведения конечного набора образующих $\mathsf{s}_1,\dots,\mathsf{s}_{n-1}$ (одна и та же образующая может входить в произведение несколько раз), причём между образующими выполнены соотношения, полностью аналогичные соотношениям из пункта (а). Докажите, что в G не более чем $n!$ элементов.

Задача 3. *Ядром* гомоморфизма групп $\varphi : G \to H$ называется множество $\{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$. Известно, что ядро гомоморфизма φ состоит из двух элементов. Может ли прообраз $\varphi^{-1}(h)$ для какого-нибудь элемента $h \in H$

(а) состоять из одного элемента;
(б) быть пустым?

Задача 4. В некоторой группе выполнено тождество $xyz = e$. Следует ли из него тождество

(а) $yzx = e$; (б) $yxz = e$?

Задача 5. Докажите, что каждая циклическая группа изоморфна либо группе $\mathbb{Z}$, либо группе $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ относительно сложения. (Группа G называется *циклической*, если найдётся такой элемент $a \in G$, что все остальные элементы представляются либо в виде $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}$, либо в виде $a^0 := e$, либо в виде $a^{-n} := (a^n)^{-1}$, где $n \in \mathbb{N}$.)

Задача 6. Классифицируйте все подгруппы

(а) бесконечной циклической группы; (б) циклической группы порядка n.

Задача 7. (а) Докажите, что каждая группа простого порядка является циклической, причём в качестве образующей можно взять любой неединичный элемент.

(б) Приведите пример не циклической группы порядка 4.

Задача 8. В городе N каждая пара жителей имеет право ровно один раз обменяться квартирами друг с другом. Несколько жителей воспользовались этим правом, чтобы произвести сложный обмен квартирами, но потом каждый захотел вернуться в свою исходную квартиру. У них есть два знакомых, которые ещё никогда ни с кем не менялись, и готовы помочь. Как нужно действовать (не нарушая правила), чтобы все оказались в своих исходных квартирах?