

Семинар 12. Действия групп

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Группа из восьми элементов действует на множестве из семи элементов. Сколько неподвижных точек (=одноэлементных орбит) может быть у такого действия?

Задача 2. Группа G задана двумя образующими x и y и соотношениями $x^n = e$, $y^2 = e$, $x y x y = e$.

(а) Постройте действие группы G на правильном n -угольнике.

(б) Покажите, что G изоморфна группе диэдра D_n (=группе симметрий правильного n -угольника).

Задача 3. (а) Определим *модулярную группу* $PSL_2(\mathbb{Z})$ как группу всех дробно-линейных преобразований комплексной плоскости \mathbb{C} вида

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и $ad - bc = 1$. Проверьте, что это действительно группа относительно композиции преобразований.

(б) Определим дробно-линейные преобразования комплексной плоскости:

$$S : z \rightarrow -\frac{1}{z}; \quad T : z \rightarrow z + 1.$$

Проверьте, что S и T порождают модулярную группу.

(в) Проверьте, что в модулярной группе выполняются соотношения $S^2 = e$, $(ST)^3 = e$.

(г) Найдите такую композицию преобразований S и T , которая переводит число $\frac{5}{3}$ в число 0. $0 = (\frac{5}{3})SLS_eLS_eL : \text{левло}$

(д*) Докажите, что каждое соотношение между S и T в модулярной группе следует из соотношений пункта (в).

Задача 4. В вершинах квадрата $ABCD$ стоят четыре школьника и держат два каната: один канат соединяет вершины A и D , второй — вершины B и C . Школьники выполняют два типа перемещений, S и T , не выпуская из рук канатов. Тип S : каждый школьник перемещается в соседнюю вершину квадрата (по часовой стрелке). Тип T : школьники из вершин A и B меняются местами, при этом школьник из вершины B должен пройти *под* канатом школьника из вершины A .

(а) Нарисуйте зацепление канатов после композиции T^2ST^3 . (Слово читается справа налево, то есть сначала три раза проделывается T , потом S и т.д.)

(б) Найдите последовательность перемещений S и T , которая позволит школьникам распутать зацепление из пункта (а)¹. (а) ξ в левло эдйлевлопшд :вжжжжжжжж

Задача 5. Группа действует с двумя орбитами на множестве из пяти элементов. При этом действие точное (то есть только единичный элемент группы действует как тождественное преобразование). Одна орбита состоит из двух элементов, а вторая — из трёх. Найдите все такие группы с точностью до изоморфизма.

Задача 6 (*). Докажите, что группа порядка 35 циклическая.

¹Хотите повторить с настоящими школьниками — смотрите <https://youtu.be/fRe1QEр5QvI>