Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 14. Абелевы группы или линейная алгебра над $\mathbb{Z}$.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть Δ — треугольник на клетчатой бумаге с вершинами в узлах. Скажем, что треугольники Δ и Δ' *смежные*, если оба треугольника можно получить, разрезая один и тот же параллелограмм (разными) диагоналями.

(а) Докажите, что если у Δ есть тупой угол, то можно подобрать смежный треугольник Δ' так, чтобы сумма квадратов длин сторон треугольника Δ' была строго меньше, чем у Δ.

(б) Докажите, что последовательно заменяя треугольник на какой-нибудь смежный с ним, можно перейти от Δ к треугольнику, у которого нет тупых углов.

(в) Выведите из пунктов (а) и (б), что если Δ не содержит других узлов клетчатой бумаги, кроме вершин (ни внутри, ни на границе), то его площадь равна $\frac{1}{2}$.

Задача 2. К какому максимально простому виду можно привести матрицу

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

элементарными преобразованиями строк и столбцов вида $R_i/C_i \to R_i/C_i \pm R_j/C_j$, $R_i/C_i \to \pm R_i/C_i$ и перестановками строк и столбцов? Разрешается выполнять любые последовательности таких преобразований независимо от того, меняют они строки или столбцы.

Задача 3. (а) Обозначим через $\mathbb{Z}^2$ множество векторов с целыми координатами на вещественной плоскости. Проверьте, что $\mathbb{Z}^2$ — группа относительно сложения.

(б) Пусть $H \subset \mathbb{Z}^2$ — подгруппа, порождённая двумя векторами $u = (1, 1)$ и $v = (1, -1)$. Найдите количество левых классов смежности $\mathbb{Z}^2/H$.

Задача 4. (а) Рассмотрим подгруппу $H \subset \mathbb{Z}^2$, порождённую векторами $u = (9, 15)$ и $v = (15, 24)$. Найдите такие образующие e_1 и e_2 группы $\mathbb{Z}^2$ и такие образующие f_1 и f_2 группы H, что

$$f_1 = d_1 e_1; \quad f_2 = d_2 e_2$$

для некоторых целых чисел d_1 и d_2. (Такие наборы образующих называются *взаимными базисами.*)

(б) Найдите все возможные пары (d_1, d_2), которые могут получиться в пункте (б).

(в) Сколько целых точек содержится в параллелограмме, натянутом на векторы u и v?

(г) Найдите количество левых классов смежности $\mathbb{Z}^2/H$.

Задача 5. Пусть $H \subset \mathbb{Z}^2$ — подгруппа, порождённая двумя векторами u и v. Докажите, что если u и v линейно независимы, то количество левых классов смежности $\mathbb{Z}^2/H$ конечно и равно площади параллелограмма, натянутого на u и v.

Задача 6. Все вершины параллелепипеда в трёхмерном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что строго внутри него есть ровно 9 целочисленных точек. (Объём единичного куба равен единице.)

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2020 г.

Домашнее задание 5. Срок сдачи 12 марта.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Изоморфны ли $\mathbb{R}^+$ (=положительные вещественные числа) и $\mathbb{R}^*$ (=ненулевые вещественные числа) как группы по умножению?

Задача 2. Пусть a, b — элементы некоторой группы. Предположим, что $a^5 = e$ и $a^3b = ba^3$. Докажите, что $ab = ba$.

Задача 3. Группа из девяти элементов действует на множестве из 2021 элементов. Докажите, что у этого действия будет по крайней мере две неподвижные точки.

Задача 4. Пусть G — группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих правильный додекаэдр.

(а) Рассмотрим три действия группы G: на множестве вершин, рёбер и граней додекаэдра. Для каждого действия найдите все орбиты и стабилизаторы.

(б) Найдите порядок группы G.

Задача 5. Пусть G — группа, такая что $x^2 = e$ для любого $x \in G$. Докажите, что G абелева.