Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 7. Жорданова нормальная форма

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите жорданову номальную форму и все возможные жордановы базисы оператора $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, если в некотором базисе T задаётся матрицей:

(а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; (в) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; (г) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; (д) $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Оператор T на вещественном векторном пространстве V задан в некотором базисе матрицей

(а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; (в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; (г) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Найдите собственные значения оператора T и какие-нибудь базисы в каждом из его собственных и корневых подпространств.

Задача 3. Для всех операторов $T : V \to V$ из задачи 2 проверьте непосредственно, что V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств оператора T.

Задача 4. Найдите минимальные многочлены всех операторов из задачи 2, их жорданову нормальную форму и какой-нибудь жорданов базис.

Задача 5. (а) Характеристический многочлен оператора равен $(t-\lambda)^3(t-\mu)^4$. Как может выглядеть жорданова нормальная форма такого оператора?

(б) Характеристический многочлен оператора равен $(t-2)^5(t-4)^7$. Найдите его жорданову нормальную форму, если известно, что все блоки имеют размер 2 или 3.

Задача 6. (а) Минимальный многочлен оператора $T : V \to V$ равен t^2. Докажите, что $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} T$.

(б) Минимальный многочлен оператора $T : V \to V$ равен $t^2 - t$. Докажите, что $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.

Указание: проверьте, что $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker}(T-I)$ и $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker}(T-I) = \{0\}$.

(в) Минимальный многочлен оператора $T : V \to V$ равен $(t-\lambda)(t-\mu)$. Докажите, что T диагонализуем тогда и только тогда, когда $\lambda \neq \mu$.

Задача 7. (а) Пусть A — жорданов блок $n \times n$ с коэффициентами 0 на диагонали, а $f \in \mathbb{F}[x]$ — многочлен. Вычислите $f(A)$.

(б) Тот же вопрос для жорданова блока с коэффициентом $\lambda \in \mathbb{F}$ на диагонали.

Задача 8 (Фробениусова нормальная форма)**.** (а) У оператора $T : V \to V$ есть такой вектор $v \in V$, что векторы $v, Tv, \ldots, T^{n-1}v$ образуют базис в V. Выпишите матрицу оператора T в этом базисе.

(б*) Докажите, что каждый линейный оператор на конечномерном пространстве над произвольным полем в некотором базисе может быть записан блочно-диагональной матрицей с квадратными блоками вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$