Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 8. Жорданова нормальная форма (продолжение)

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше 3. Определим оператор $T : V \to V$ формулой:
$$(Tf)(x) = f(x+2).$$
Найдите жорданову нормальную форму оператора T и жорданов базис.

Задача 2. Оператор T на вещественном векторном пространстве V задан в некотором базисе матрицей

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix};\quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix};\quad \text{(г)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдите минимальный многочлен оператора T. Проверьте непосредственно, что V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств оператора T.

Ответы: (а) $(t-1)^2(t+1)$; (б) $(t-1)(t-2)(t-3)$; (в) $(t-2)^3$; (г) $(t-1)^2(t-2)^2$

Указание: эти операторы удовлетворяют условию задачи 8(а).

Задача 3. Найдите жорданову нормальную форму всех операторов из задачи 2 и какой-нибудь жорданов базис.

Задача 4. (а) Характеристический многочлен оператора равен $(t-\lambda)^3(t-\mu)^4$. Как может выглядеть жорданова нормальная форма такого оператора?

(б) Характеристический многочлен оператора равен $(t-2)^5(t-4)^7$. Найдите его жорданову нормальную форму, если известно, что все блоки имеют размер 2 или 3.

Задача 5. (а) Минимальный многочлен оператора $T : V \to V$ равен t^2. Докажите, что $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} T$.

(б) Минимальный многочлен оператора $T : V \to V$ равен $t^2 - t$. Докажите, что $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$. Указание: проверьте, что $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker}(T-I)$ и $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker}(T-I) = \{0\}$.

(в) Минимальный многочлен оператора $T : V \to V$ равен $(t-\lambda)(t-\mu)$. Докажите, что T диагонализуем тогда и только тогда, когда $\lambda \neq \mu$.

Задача 6. (а) Пусть A — жорданов блок $n \times n$ с коэффициентами 0 на диагонали, а $f \in \mathbb{F}[x]$ — многочлен. Вычислите $f(A)$.

(б) Тот же вопрос для жорданова блока с коэффициентом $\lambda \in \mathbb{F}$ на диагонали.

Задача 7 (Фробениусова нормальная форма)**.** (а) У оператора $T : V \to V$ есть такой вектор $v \in V$, что векторы $v, Tv, \ldots, T^{n-1}v$ образуют базис в V. Выпишите матрицу оператора T в этом базисе.

(б*) Докажите, что каждый линейный оператор на конечномерном пространстве над произвольным полем в некотором базисе может быть записан блочно-диагональной матрицей с квадратными блоками вида:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$