Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 9. Рекуррентные последовательности

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Рекуррентная последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению:

$$\text{(а) } a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n; \quad \text{(б) } a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n); \quad \text{(в) } a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n).$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n, если известно, что $a_0 = a_1 = 2$.

Задача 2. Гермиона варит зелье в двух котлах: золотом и серябряном. Изначально в каждом котле было по 10 унций зелья. По рецепту требуется повторять такую процедуру: *одновременно* перелить одну треть содержимого золотого котла в серебряный котёл и перелить половину содержимого серябряного котла в золотой (например, после первого применения процедуры в золотом котле будет $11\frac{2}{3}$ унций зелья, а в серебряном — $8\frac{1}{3}$). Сколько зелья будет в каждом из котлов после 10-кратного применения этой процедуры? Ответ дайте с точностью до миллилитра. (Напоминание: одна английская жидкая унция равна $28,413063$ мл.)

Задача 3. Рекуррентная последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению:

$$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n, если известно, что $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 14$.

Задача 4. Существует ли вещественная 2×2 матрица A такая, что $A^3 = 0$, но $A^2 \neq 0$?

Задача 5. Может ли минимальный многочлен матрицы с вещественными коэффициентами над полем вещественных чисел отличаться от минимального многочлена этой же матрицы над полем комплексных чисел?

Задача 6. Существует ли вещественная 2×2 матрица B такая, что $B^2 = A$, где

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

(в) Существует ли вещественная 3×3 матрица B такая, что $B^2 = A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}?$$