# СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ, ЧИСЛА И МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН
### В ЗАДАЧАХ

Валентина Кириченко

## 1. Собственные векторы и собственные числа оператора

Если линейный оператор $T$ переводит векторное пространство в то же самое векторное пространство, то определены его композиции с самим собой, такие как $T \cdot T$ или $T \cdot T \cdot T$. По аналогии со степенью числа можно определить $n$-ую степень $T^n$ оператора $T$. Для целых положительных $n$ определим

$$T^n = \underbrace{T \cdot \cdots \cdot T}_{n}.$$

Также по аналогии со степенью числа определим $T^0 = I$, где $I$ — тождественный оператор на том же пространстве.

**Задача 1.** Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задан матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверьте по индукции, что матрица оператора $T^n$ в том же базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix},$$

где $f_n$ — это $n$-ое число Фибоначчи. Напомним, что $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, а остальные числа Фибоначчи определяются рекуррентной формулой:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ при } n \geq 2.$$

Как найти явные (не рекуррентные) формулы для коэффициентов матрицы оператора $T^n$, если дана матрица оператора $T$? Если матрица диагональная, то всё просто — нужно возводить в степень коэффициенты на диагонали. В общем случае можно попытаться найти новый базис, в котором матрица оператора станет диагональной. Для этого нужно найти все *собственные векторы* оператора $T$. Ненулевой вектор $v$ называется собственным с собственным значением (или числом) $\lambda$, если

$$T(v) = \lambda v.$$

**Задача 2.** Найдите все собственные векторы и собственные числа оператора $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** (а) Найдём координаты $v = (x_1, x_2)$ собственного вектора оператора $T$ с собственным значением $\lambda$. По определению собственного вектора должно выполняться равенство $T(v) = \lambda v$, что в координатах выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_2 = \lambda x_1$, $x_1 + x_2 = \lambda x_2$. Получили однородную систему из двух уравнений на два неизвестных, которую в матричном виде можно записать так:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевое решение будет, только если ранг системы меньше двух (уравнения пропорциональны друг другу), то есть $-\lambda(1-\lambda) - 1 = 0$. Получаем квадратное уравнение на $\lambda$:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \text{ откуда } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Решая систему при $\lambda = \lambda_1$, находим, что все собственные векторы с собственным значением $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (это золотое сечение) пропорциональны вектору $v_1 = (1, \lambda_1)$. Аналогично, все собственные векторы с собственным значением $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ пропорциональны вектору $v_2 = (1, \lambda_2)$. Других собственных чисел и собственных векторов нет.

Простое, но очень важное наблюдение:

> Если матрица оператора в базисе $v_1, \ldots, v_n$ диагональна, то каждый из векторов $v_1, \ldots, v_n$ — это собственный вектор оператора.

Действительно, если на диагонали матрицы стоят числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, T(v_n) = \lambda_n v_n$ по определению матрицы линейного оператора. Следовательно, вектор $v_i$ — это собственный вектор с собственным значением $\lambda_i$. Верно и обратное утверждение:

> Если все векторы некоторого базиса являются собственными векторами оператора, то матрица оператора в этом базисе диагональна.

**Задача 3.** Постройте какой-нибудь базис из собственных векторов оператора $T$ из задачи 2. Найдите матрицу оператора $T$ в построеннном базисе.

Если удалось построить базис из собственных векторов, то несложно найти явную формулу для коэффициентов матрицы оператора $T^n$ и в исходном базисе. Проиллюстрируем это на примере матрицы из задачи 1.

**Задача 4.** Найдите явную формулу, выражающую через $n$ коэффициенты матрицы $A^n$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Пусть $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — оператор, заданный в стандартном базисе $(e_1, e_2)$ матрицей $A$. В задаче 2 мы нашли собственные векторы $v_1 = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ и $v_2 = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ с собственными значениями $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, соответственно. Векторы $v_1$ и $v_2$ образуют базис, в котором матрица оператора $T$ диагональна и имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Запишем $v_1$ и $v_2$ как векторы-столбцы и составим из них матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку столбцы матрицы $P$ являются собственными векторами матрицы $A$, выполнено матричное тождество:

$$AP = PB.$$

В самом деле, равенство первых столбцов матриц $AP$ и $PB$ в точности означает, что $Av_1 = \lambda_1 v_1$, а равенство вторых столбцов означает, что $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Отсюда следует, что $A = PBP^{-1}$.

Получаем

$$A^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1})}_{n} = PB^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Отсюда получаем явную формулу:

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1}\\ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2 & -1\\ -\lambda_1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}\lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_2^n\lambda_1 & \lambda_2^n - \lambda_1^n\\ \lambda_1^{n+1}\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}\end{pmatrix}.$$

В частности, сопоставив эту формулу с результатом задачи 1, мы получим формулу Бине для $n$-го числа Фибоначчи:

$$f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

**Задача 5.** В задаче 4 мы вывели формулу:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}\lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_2^n\lambda_1 & \lambda_2^n - \lambda_1^n\\ \lambda_1^{n+1}\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}\end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Левая часть формулы — симметрическая матрица, потому что является произведением симметрических матриц. Проверьте непосредственно, что правая часть формулы тоже симметрическая матрица.

**Задача 6.** Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в стандартном базисе матрицей

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix};\quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix};\quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix};\quad \text{(г)}\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Нарисуйте векторы $T^n(v)$ для $n = 1,\dots, 5$ и $v = (1, 0)$, $(1, -1)$.

**Задача 7.** (а) Найдите все вещественные собственные числа и собственные векторы операторов из задачи 6.

(б) Определите, какие из операторов в пункте (а) *диагонализуемы*, то есть в некотором базисе записываются диагональной матрицей. Для диагонализуемых операторов найдите базис, в котором их матрица диагональна.

**Задача 8.** Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы $A^n$ для всех матриц $A$ из задачи 6.

**Задача 9** (∗)**.** Рациональный кузнечик прыгает по рациональным точкам прямой. Перед очередным прыжком кузнечик выбирает натуральное число $n$. Далее, если находится он в точке $\frac{p}{q}$, то прыгает в точку $\frac{p+nq}{q+np}$. Изначально кузнечик находится в точке 2020. Может ли он попасть в точку 3?

**Указание.** Вместо кузнечика можно рассмотреть набор операторов $T_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, занумерованных натуральными числами $n$ и заданных в стандартном базисе матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Вместо точки $\frac{p}{q}$ рассмотрим вектор $(p, q)$. Тогда прыжок кузнечика — это результат применения оператора $T_n$ к вектору $(p, q)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + nq \\ q + np \end{pmatrix}.$$

## 2. Многочлены от оператора

Если $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен, а $T : V \to V$ — оператор на векторном пространстве $V$, то можно определить оператор $f(T) : V \to V$ на том же пространстве:

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_0 I.$$

Может показаться странным, что при подстановке оператора в многочлен мы вместо $a_0$ пишем $a_0 I$, но просто $a_0$ оставить никак нельзя — мы не умеем складывать друг с другом оператор и число. Учитывая наше соглашение $T^0 = I$, мы можем переписать

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_0 T^0.$$

В таком виде определение выглядит более естественным.

**Задача 10.** Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан в стандартном базисе матрицей

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(г)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для многочлена $f(t) = t^2 - t - 1$ найдите оператор $f(T)$.

**Решение.** (а) Матрица оператора $f(T) = T^2 - T - I$ в стандартном базисе равна $A^2 - A - I$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

$$A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Другое решение.** (а) В базисе из собственных векторов оператора $T$ (который Вы, возможно, нашли в задаче 2) матрица оператора диагональна и имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица оператора $f(T) = T^2 - T - I$ в том же базисе имеет вид:

$$f(B) = \begin{pmatrix} f(2) & 0 \\ 0 & f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 - 2 - 1 & 0 \\ 0 & 1^2 - 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это неполный ответ, поскольку мы не предъявили явно базис из собственных векторов. Однако из матрицы $f(B)$ несложно получить матрицу $f(A)$, то есть матрицу оператора $f(T)$ в стандартном базисе. Поскольку $A = PBP^{-1}$, где $P$ — матрица, составленная из собственных векторов-столбцов, получаем

$$f(A) = f(PBP^{-1}) = (PBP^{-1})^2 - PBP^{-1} - I =$$
$$= PB^2P^{-1} + PBP^{-1} - PIP^{-1} = P(B^2 + B - I)P^{-1} = Pf(B)P^{-1}.$$

Вместо явного вычисления матрицы $P$, можно использовать такой трюк. Заметим, что $f(B) = 2B - 3I$. Тогда

$$f(A) = Pf(B)P^{-1} = P(2B - 3I)P^{-1} = 2PBP^{-1} - 3I = 2A - 3I =$$
$$= 2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 - 3 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot(-1) - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в отличие от первого решения, нам не пришлось возводить матрицу $A$ в квадрат.

Зачем подставлять в многочлены оператор? Оказывается, это даёт ещё один способ (возможно, самый быстрый) вычислять степени оператора. Способ основан на делении многочленов с остатком.

**Задача 11.** Найдите остаток при делении многочлена $t^{2020}$ на многочлен $t^2 - 3t + 2$.

**Решение.** Конечно, можно поделить уголком, но это займёт много времени. Лучше воспользуемся тем, что и многочлен $t^{2020}$, и его остаток должны принимать одинаковые значения в корнях многочлена $t^2 - 3t + 2$. Действительно, запишем результат деления с остатком:

$$t^{2020} = (t^2 - 3t + 2)q(t) + r(t)$$

и подставим в обе части сначала 1, а потом 2 (это корни многочлена $t^2 - 3t + 2$). Получим два уравнения: $1^{2020} = r(1)$ и $2^{2020} = r(2)$. Поскольку степень остатка $r(t)$ строго меньше двух, мы можем однозначно восстановить многочлен $r(t)$ по его значениям в двух точках. В самом деле, запишем $r(t) = at + b$, где $a$ и $b$ — пока неизвестные нам коэффициенты. Тогда $1 = a + b$ и $2^{2020} = 2a + b$ — два линейных уравнения на два неизвестных. Решая их, находим $a = 2^{2020} - 1$, $b = 2 - 2^{2020}$. Поэтому остаток равен $(2^{2020} - 1)t + (2 - 2^{2020})$.

**Другое решение.** Это решение отличается от предыдущего методом нахождения линейной функции $r(t)$, которая в точках 1 и 2 принимает те же значения, что и функция $t^{2020}$. Вместо решения системы линейных уравнений найдём $r(t)$ по интерполяционной формуле Лагранжа:

$$r(t) = 1^{2020}\left(\frac{t-2}{1-2}\right) + 2^{2020}\left(\frac{t-1}{2-1}\right) = -(t-2) + 2^{2020}(t-1) = (2^{2020} - 1)t + (2 - 2^{2020}).$$

Скажем, что многочлен $f$ *аннулирует* оператор $T$, если $f(T)$ — нулевой оператор. В частности, если $A$ — матрица оператора $T$ в каком-нибудь базисе, то $f(A)$ — нулевая матрица. Матрицы оператора в разных базисах получаются друг из друга сопряжением с помощью обратимой матрицы, поэтому:

> Если многочлен $f$ аннулирует матрицу $A$, то $f$ аннулирует и матрицу $PAP^{-1}$ для всех обратимых матриц $P$.

**Задача 12.** Многочлен $t^2 - 3t + 2$ имеет ровно два вещественных корня: 1 и 2. Однако можно предъявить бесконечное семейство таких $2 \times 2$ матриц, что $A^2 - 3A + 2I = 0$. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a$ — вещественный параметр. Почему доказательство утверждения

> "Количество вещественных корней многочлена не превышает его степени."

перестаёт работать при переходе от вещественных чисел к матрицам?

**Задача 13.** Для матрицы $A$ найдите многочлен степени не выше 2, который её аннулирует:

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в) } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(г) } A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(д) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(е) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Задача 14.** Не вычисляя собственные векторы, вычислите коэффициенты матрицы $A^n$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Собственные числа матрицы $A$ равны 1 и 2, поэтому многочлен $(t-1)(t-2) = t^2 - 3t + 2$ аннулирует матрицу $A$. В самом деле,

$$(A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В задаче 11 мы поделили с остатком многочлен $t^n$ на $(t-1)(t-2)$ и получили такое равенство многочленов:

$$t^n = (t-1)(t-2)q(t) + at + b,$$

где $a = 2^n - 1$, $b = 2 - 2^n$. Поскольку многочлены в левой и правой части равны (то есть равны их коэффициенты при соответственных степенях переменной $t$), то равны и многочлены от матрицы:

$$A^n = (A - I)(A - 2I)q(A) + aA + bI.$$

Теперь вычисляем правую часть:

$$(A - I)(A - 2I)q(A) + aA + bI =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} q(A) + a \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & 3 \cdot 2^n - 3 \\ -2^{n+1} + 2 & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

**Задача 15.** Вычислите коэффициенты матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$$

с точностью до второго знака после запятой включительно.

**Задача 16 (∗).** Пусть $f(t)$ — многочлен, а $A$ — $2 \times 2$ матрица с собственными значениями $\lambda_1$ и $\lambda_2$.

(а) Докажите, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$f(A) = f(\lambda_1) \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2) \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(б) Придумайте аналогичную формулу для случая $\lambda_1 = \lambda_2$.

## 3. Минимальный многочлен оператора

У каждого оператора на конечномерном векторном пространстве есть ненулевой аннулирующий многочлен. Действительно, если $A$ — матрица оператора в каком-нибудь базисе, а $n$ — размерность пространства, то матрицы $I$, $A$, $A^2$,…, $A^d$ заведомо линейно зависимы, если $d \geq n^2$ (как мы помним, размерность пространства $n \times n$ матриц равна $n^2$). Условие линейной зависимости

$$a_d A^d + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I = 0$$

в точности совпадает с условием, что многочлен $f(t) = a_d t^d + \ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ аннулирует матрицу $A$.

Для вычисления степени оператора мы использовали остатки при делении на аннулирующий многочлен. Чем меньше степень аннулирующего многочлена, тем проще находить остатки. Как найти *минимальный многочлен* оператора, то есть ненулевой аннулирующий многочлен минимальной возможной степени? Потребуем для определённости, чтобы коэффициент при старшей степени минимального многочлена был равен единице.

**Задача 17.** Может ли оператор иметь два разных минимальных многочлена?

**Решение.** Нет, не может. Пусть $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ и $g(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_0$ — два минимальных многочлена оператора $T$. Тогда $m \geq n$ поскольку $f(t)$ имеет минимальную степень среди всех ненулевых аннулирующих многочленов. Аналогично убеждаемся, что $n \geq m$, откуда $m = n$. Поэтому разность $f(t) - g(t) = (a_{n-1} - b_{n-1})t^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0)$ — это многочлен степени строго меньше, чем $n$. При этом $f - g$ тоже аннулирует оператор $T$:

$$f(T) - g(T) = 0 - 0 = 0.$$

Следовательно, $f - g$ — это нулевой многочлен, иначе мы получили бы, что $f - g$ — ненулевой аннулирующий многочлен степени строго меньше, чем $n$. Отсюда $a_{n-1} = b_{n-1}$,…, $a_0 = b_0$.

**Задача 18.** Докажите, что многочлен $f$ аннулирует оператор $T$ тогда и только тогда, когда $f$ делится на минимальный многочлен оператора $T$.

**Задача 19.** Проверьте, что каждая $2 \times 2$ матрица $A$ удовлетворяет квадратному уравнению:

$$A^2 + pA + qI = 0,$$

где $p = -\mathrm{tr}(A)$, $q = \det(A)$.

**Задача 20.** Проверьте, что если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — собственные числа $2 \times 2$ матрицы $A$, то $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A)$, $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$.

**Задача 21.** Оператор $T$ на векторном пространстве удовлетворяет уравнению

$$T^2 - 5T + 6I = 0.$$

Чему могут быть равны собственные значения оператора $T$?

**Решение.** Рассмотрим собственный вектор $v$ оператора $T$ с каким-нибудь собственным значением $\lambda$. Тогда по определению $T(v) = \lambda v$. Следовательно,

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v.$$

Отсюда получаем:

$$(T^2 - 5T + 6I)(v) = T^2(v) - 5T(v) + 6v = \lambda^2 v - 5\lambda v + 6v = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)v.$$

Поскольку по условию $T^2 - 5T + 6I$ — нулевой оператор, вектор $(T^2 - 5T + 6T)(v)$ тоже нулевой. С другой стороны, мы показали, что $(T^2-5T+6T)(v) = (\lambda^2-5\lambda+6)v$. Следовательно, $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, откуда возможные значения для $\lambda$ — это 2 или 3.

Осталось проверить, что существуют операторы с собственными значениями 2 и 3, удовлетворяющие условию задачи. Например, можно взять оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, который в некотором базисе записывается матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица оператора $T^2 - 5T + I$ в том же базисе имеет вид:

$$A^2 - 5A + 6A = (A - 2I)(A - 3I) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соображение, использованное в решении задачи 21, можно обобщить:

> Если $v$ — собственный вектор оператора $T$ с собственным значением $\lambda$, а $f(t)$ — многочлен, то
> $$f(T)v = f(\lambda)v.$$

В частности, если многочлен $f$ аннулирует оператор $T$, то $f(\lambda) = 0$ для всех собственных значений $\lambda$ оператора $T$. Отсюда получаем довольно сильное условие на аннулирующие многочлены оператора:

> Каждое собственное значение оператора является корнем каждого аннулирующего многочлена этого оператора.

**Задача 22.** Матрица оператора $T$ в некотором базисе диагональна, причём на диагонали стоят числа

$$\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{m_k},$$

и $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_k$ попарно различны. Найдите минимальный многочлен оператора $T$.

**Решение.** Проверим, что многочлен $(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k)$ аннулирует оператор $T$, то есть

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_k I) = 0.$$

Матрица оператора $T - \lambda_1 I$ (в том же базисе) тоже диагональна, и на диагонали стоят числа

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2 - \lambda_1, \ldots, \lambda_2 - \lambda_1}_{m_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_k - \lambda_1, \ldots, \lambda_k - \lambda_1}_{m_k}.$$

В частности, первые $m_1$ столбцов этой матрицы нулевые, то есть оператор $T - \lambda_1 I$ переводит первые $m_1$ базисных векторов в нулевой вектор. Вычисляя матрицы операторов $T - \lambda_2 I$,..., $T - \lambda_k I$, убеждаемся, что для каждого базисного вектора $e_j$ найдётся такое $\lambda_i$, что $(T-\lambda_i I)e_j = 0$. Иными словами, $j$-тый столбец матрицы оператора $(T-\lambda_i I)$ равен нулю. Следовательно, композиция $(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I) \cdots (T-\lambda_k I)$ переводит в нуль все базисные векторы, то есть является нулевым оператором.

Осталось проверить, что никакой ненулевой многочлен степени строго меньше, чем $k$, не аннулирует $T$. Поскольку количество корней многочлена не превышает его степени, многочлен $g(t)$ степени меньше, чем $k$, не может иметь $k$ попарно различных корней. Поэтому найдётся такое число $\lambda_i$, что $g(\lambda_i) \neq 0$. Возьмём собственный вектор $v$ оператора $T$ с собственным значением $\lambda_i$ (например, можно взять подходящий базисный вектор). Тогда $g(T)v = g(\lambda)v \neq 0$, поэтому $g(T) \neq 0$, то есть многочлен

$g$ не аннулирует оператор $T$. Таким образом, минимальный многочлен оператора $T$ имеет степень $k$, и равен $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_k)$.

**Задача 23.** Может ли минимальный многочлен диагонализуемого оператора иметь кратные корни?

**Задача 24.** Найдите минимальный многочлен оператора $T$, заданного в некотором базисе матрицей:

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** (в) Возьмём какой-нибудь ненулевой вектор $v_1 \in \mathbb{R}^4$ и будем вычислять $T(v_1)$, $T^2(v_1)$,... до тех пор, пока полученные векторы не станут линейно зависимы. Например,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad T^2(v_1) = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Получаем линейную зависимость:

$$T^2(v_1) - 3T(v_1) + 2v_1 = 0.$$

Поэтому оператор $T^2 - 3T + I$ переводит векторы $v_1$ и $T(v_1)$ в нулевой вектор. Действительно,

$$(T^2 - 3T + I)(v_1) = T^2(v_1) - 3T(v_1) + v_1 = 0;$$
$$(T^2 - 3T + I)T(v_1) = T(T^2 - 3T + I)(v_1) = T(0) = 0.$$

Таким образом, мы нашли такой ненулевой многочлен $f_1(t) = t^2 - 3t + 2$, что оператор $f_1(T)$ аннулирует векторы $v_1$ и $T(v_1)$. При этом степень $f_1$ минимально возможная — это следут из линейной независимости векторов $v_1$ и $T(v_1)$. Результат наших вычислений можно сформулировать так:

> Минимальный многочлен оператора $T$, ограниченного на подпространство $V_1 = \langle v_1, T(v_1), T^2(v_1), \ldots \rangle$, совпадает с многочленом $f_1$.

Теперь возьмём какой-нибудь вектор $v_2$, линейно независимый с векторами $v_1$ и $T(v_1)$ (то есть $v_2$ не лежит в подпространстве $V_1$). Повторим вышеописанную процедуру с $v_2$. Например,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad T^2(v_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Получаем линейную зависимость

$$T^2(v_2) - 3T(v_2) + 2v_2 = 0,$$

откуда находим многочлен $f_2(t) = t^2 - 3t + 2$ (он по чистой случайности совпал с $f_1$). Это минимальный многочлен оператора $T$, ограниченного на подпространство $V_2 = \langle v_2, T(v_2), T^2(v_2), \ldots \rangle$.

Если бы векторы $v_1$, $T(v_1)$, $v_2$, $T(v_2)$ были линейно независимы, то на этом можно было бы остановиться. Но есть линейная зависимость $v_1 - T(v_1) + v_2 - T(v_2) = 0$. Поэтому $V_1$ и $V_2$ не порождают $\mathbb{R}^4$, а порождают трёхмерное подпространство в $\mathbb{R}^4$.

Следовательно, найдётся третий вектор $v_3$, линейно независимый с $v_1$, $T(v_1)$, $v_2$ (то есть $v_3$ не лежит в сумме подпространств $V_1 + V_2$). Применим к $v_3$ ту же процедуру, что к $v_1$ и $v_2$. Например,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad T^2(v_3) = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Получаем линейную зависимость

$$T^2(v_3) - 3T(v_3) + 2v_3 = 0,$$

откуда находим многочлен $f_3(t) = t^2 - 3t + 2$. Это минимальный многочлен оператора $T$, ограниченного на подпространство $V_3 = \langle v_3, T(v_3), T^2(v_3), \ldots \rangle$.

Минимальный многочлен $f$ оператора $T$ — это наименьшее общее кратное многочленов $f_1$, $f_2$ и $f_3$. Действительно, $f$ является аннулирующим многочленом оператора $T$, ограниченного на подпространство $V_i$, поэтому $f$ делится на $f_i$. Следовательно, $f$ делится и на НОК$(f_1, f_2, f_3)$. С другой стороны, НОК$(f_1, f_2, f_3)$ аннулирует оператор $T$. В самом деле, оператор НОК$(f_1, f_2, f_3)[T]$ переводит каждое из подпространств $V_i$ в нуль, потому что многочлен НОК$(f_1, f_2, f_3)$ делится на $f_i$, то есть на минимальный многочлен оператора $T$, ограниченного на $V_i$. Поскольку $V = V_1 + V_2 + V_3$, получаем, что НОК$(f_1, f_2, f_3)[T]$ — нулевой оператор, так как переводит в нуль всё пространство $V$. В нашем случае $f_1 = f_2 = f_3 = t^2 - 3t + 2$, поэтому НОК$(f_1, f_2, f_3) = t^2 - 3t + 2$.

## 4. Рекуррентные последовательности

Мы научились находить явные формулы для степеней оператора двумя способами: с помощью собственных векторов и с помощью минимального многочлена оператора. В качестве приложения найдём явные формулы для рекуррентных последовательностей, подобные формуле Бине для чисел Фибоначчи. Заодно разберёмся в особых случаях: что делать, когда собственные векторы не образуют базис, и минимальный многочлен имеет кратные корни.

**Задача 25.** Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 3.$$

Найдите явную формулу, выражающую $a_n$ через $n$.

**Решение.** Рассмотрим все последовательности, удовлетворяющие соотношению

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n.$$

Каждая такая последовательность однозначно определяется начальными условиями $(a_0, a_1)$. Поэтому мы можем отождествить последовательности с векторами $(a_0, a_1)$ в $\mathbb{R}^2$. Для каждой последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ можно определить её *сдвиг* $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Легко проверить, что отображение $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, которое сопоставляет последовательности её сдвиг, является линейным оператором на $\mathbb{R}^2$. Матрица оператора $T$ в стандартном базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В частности, для каждой последовательности выполняется матричное тождество:

$$A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Действительно, если мы $n$ раз применяем к последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ оператор сдвига, то получаем последовательность $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$.

Найдём собственные векторы оператора $T$. Заметим, что собственный вектор оператора $T$ с собственным значением $\lambda$ — это такая рекуррентная последовательность, которая вдобавок является геометрической прогрессией со знаменателем $\lambda$. Действительно, условие $T(v) = \lambda v$ для последовательности $v = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ означает, что $a_1 = \lambda a_0$, $a_2 = \lambda a_1, \ldots$ Таким образом, $v = (a_0, a_0\lambda, a_0\lambda^2, \ldots)$. Такая геометрическая прогрессия удовлетворяет рекуррентному соотношению, если

$$a_0\lambda^{n+2} = 3a_0\lambda^{n+1} + 4a_0\lambda^n,$$

откуда получаем, что $\lambda$ — корень *характеристического многочлена* $t^2 - 3t - 4$. Поэтому собственные значения оператора $T$ равны 4 и $-1$.

В качестве собственных векторов возьмём геометрические прогрессии $a_n = 4^n$ и $a_n = (-1)^n$. Им соответствуют линейно независимые векторы $(1, 4)$ и $(1, -1)$ в $\mathbb{R}^2$, поэтому собственные векторы образуют базис в пространстве всех рекуррентных последовательностей. Таким образом, рекуррентная последовательность, удовлетворяющая условию задачи, представляется в виде линейной комбинации

$$a_n = 4^n\alpha + (-1)^n\beta,$$

где $\alpha$ и $\beta$ — вещественные параметры. В нашем случае из условий $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ выводим два линейных уравнения на $\alpha$ и $\beta$:

$$\alpha + \beta = 1; \quad 4\alpha - \beta = 3,$$

откуда $\alpha = \frac{4}{5}$, $\beta = \frac{1}{5}$. Отсюда получаем явную формулу:

$$a_n = \frac{4^{n+1} + (-1)^n}{5}$$

**Другое решение.** Это решение отличается от первого тем, что вместо поиска собственных векторов мы ищем минимальный многочлен того же самого оператора $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Возьмём последовательность $v = (1, 0, \ldots)$ и будем искать линейную зависимость между векторами $v$, $T(v) = (0, 3\cdot 0 + 4\cdot 1, \ldots) = (0, 4, \ldots)$ и $T(v^2) = (4, 3\cdot 4 + 4\cdot 0, \ldots) = (4, 12, \ldots)$. Получаем соотношение

$$T^2(v) - 3T(v) - 4v = 0.$$

Поэтому минимальный многочлен оператора $T$ равен $t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1)$. Действуя, как в задаче 11, поделим с остатком многочлен $t^n$ на $(t-4)(t+1)$, получим:

$$t^n = (t-4)(t+1)q(t) + at + b,$$

где $a = \frac{4^n - (-1)^n}{5}$, $b = \frac{4(-1)^n + 4^n}{5}$. Подставляя оператор $T$ в это тождество, получаем

$$T^n = aT + bI.$$

В матричном виде:

$$A^n = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4(-1)^n + 4^n & 4^n - (-1)^n \\ 4(4^n - (-1)^n) & 4^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Поэтому для последовательности с начальными условиями $a_0 = 1$, $a_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4(-1)^n + 4^n & 4^n - (-1)^n \\ 4(4^n - (-1)^n) & 4^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + (-1)^n \\ 4^{n+2} + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

**Задача 26.** Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1.$$

Найдите явную формулу, выражающую $a_n$ через $n$.

**Задача 27.** Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n; \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$$

Найдите явную формулу, выражающую $a_n$ через $n$.

**Задача 28.** Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n); \quad a_0 = 2,\ a_1 = 2.$$

Найдите явную формулу, выражающую $a_n$ через $n$.

**Решение.** Действуя, как в первом решении задачи 25 находим геометрическую прогрессию $v_1 = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ со знаменателем $\lambda$, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$\lambda^{n+2} = 4\lambda^{n+1} - 4\lambda^n.$$

Отсюда находим характеристическое уравнение на знаменатель $\lambda$:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Поскольку $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$ это уравнение имеет только один корень 2 (кратности два). Иными словами, у оператора $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

есть только один собственный вектор с точностью до пропорциональности. То есть собственные векторы оператора $T$ не образуют базиса.

Однако можно угадать ещё одну “удобную” последовательность, удовлетворяющую рекуррентому соотношению

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

Это последовательность, заданная формулой $a_n = n2^n$. Обозначим её через $v_2$. Последовательности $v_1$ и $v_2$ образуют базис в пространстве всех последовательностей, удовлетворяющих данному рекуррентному соотношению, поскольку векторы $(1, 2)$ и $(0, 2)$ линейно независимы в $\mathbb{R}^2$. Поэтому последовательность, удовлетворяющая условиям задачи, представляется в виде линейной комбинации

$$a_n = 2^n\alpha + n2^n\beta.$$

Из условий $a_0 = 2$, $a_1 = 2$ находим $\alpha = 2$, $\beta = -1$, откуда

$$a_n = 2^n(2 - n).$$

**Другое решение.** Действуя, как во втором решении задачи 25, мы ищем минимальный многочлен оператора $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Возьмём последовательность $v = (1, 0, \ldots)$ и будем искать линейную зависимость между векторами $v$, $T(v) = (0, -4, \ldots) = (0, 4, \ldots)$ и $T(v^2) = (-4, 16)$. Получаем соотношение

$$T^2(v) - 4T(v) + 4v = 0.$$

Поэтому минимальный многочлен оператора $T$ равен $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$. Поделим с остатком многочлен $t^n$ на $(t-2)^2$, получим:

$$t^n = (t-2)^2 q(t) + at + b.$$

Подставив $t = 2$ в обе части тождества, получим $2a + b = 2^n$. Откуда взять второе уравнение на $a$ и $b$? Тут можно воспользоваться тем, что если у многочлена есть корень кратности два, то этот же корень есть и у его производной. В самом деле, продифференцируем обе части тождества по $t$:

$$nt^{n-1} = 2(t-2)q(t) + (t-2)^2 q'(t) + a.$$

Снова подставим $t = 2$, получим $a = n2^{n-1}$. Отсюда $b = (1-n)2^n$. Тот же ответ можно было получить сразу из интерполяционной формулы Лагранжа с кратными узлами, которая в данном случае совпадает с формулой Тейлора.

Подставляя оператор $T$ в тождество $t^n = (t-2)^2 q(t) + at + b$, получаем

$$T^n = aT + bI.$$

В матричном виде:

$$A^n = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2(1-n) & n \\ -4n & 2(n+1) \end{pmatrix}.$$

Поэтому для последовательности с начальными условиями $a_0 = 2$, $a_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2(1-n) & n \\ -4n & 2(n+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 4-2n \\ 4-4n \end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix} 2-n \\ 2-2n \end{pmatrix}.$$

**Задача 29.** Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n); \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Найдите явную формулу, выражающую $a_n$ через $n$.

Факультет математики, НИУ ВШЭ
*E-mail address*: vkiritch@hse.ru