

Семинар 15. Ортонормированные базисы

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Выпишите матрицу Грама симметричной билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$ в стандартном базисе (e_1, e_2) в \mathbb{R}^2 , если известно, что

$$b(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 2; \quad b(e_1 - e_2, e_1 + e_2) = 1; \quad b(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = 2.$$

(б) Выясните, является ли форма из пункта (а) положительно определённой. Если является, найдите какой-нибудь ортонормированный базис относительно этой формы, применив ортогонализацию Грама-Шмидта к стандартному базису.

Задача 2. Выпишите матрицы Грама в стандартном базисе следующих квадратичных форм на \mathbb{R}^2 :

$$(а) x_1^2 + x_2^2; \quad (б) 2x_1x_2; \quad (в) x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Для каждой формы найдите ортонормированный базис (относительно стандартного скалярного произведения), в котором её матрица Грама диагональна.

Задача 3. Диагонализируйте операторы в ортонормированном базисе (относительно стандартного скалярного произведения в \mathbb{R}^n):

$$(а) \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}; \quad (б) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}; \quad (в) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}; \quad (г) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы выписаны в стандартном базисе в \mathbb{R}^n , через a обозначается вещественный параметр.

Задача 4. Приведите к главным осям коники, заданные уравнениями:

$$(а) x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2 = 1; \quad (б) x_1^2 + 2ax_1x_2 = 1.$$

Через a обозначается вещественный параметр.

Задача 5. Приведите к главным осям квадрику в \mathbb{R}^3 , заданную уравнением:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1.$$

Задача 6. Пусть V — векторное пространство вещественных $n \times n$ матриц. Является ли функция

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}; \quad Q(A) := \text{tr}(A^2)$$

квадратичной формой? Если является, то чему равна её поляризация?

Задача 7. (а) Докажите, что если B — матрица Грама в стандартном базисе какой-нибудь положительно определённой квадратичной формы на \mathbb{R}^n , то найдётся такая вещественная матрица A , что $B = AA^t$.

(б*) Докажите, что все собственные значения матрицы B вещественны и положительны.