Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

**Семинар 16. Коники и квадрики**

факультет математики, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Определим *эллипс с фокусами* $A$ *и* $B$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ как множество всех таких точек $X$, что сумма расстояний $|AX| + |BX|$ постоянна (и строго больше, чем $|AB|$).

(а) Покажите, что каждый эллипс можно перевести движением плоскости в кривую, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(б) Покажите, что сечение прямого кругового цилиндра $C = \{x^2 + y^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ плоскостью $\Pi$, не содержащей ось $z$, является эллипсом.

(в) Покажите, что фокусы эллипса из пункта (б) можно найти с помощью *сфер Данделена* таким образом. Поместим в цилиндр $C$ две сферы радиуса $R$ так, чтобы обе сферы касались плоскости $\Pi$ (одна сверху, другая снизу). Тогда точки касания — это в точности фокусы эллипса $C \cap \Pi$.

**Задача 2.** (а) Дайте геометрическое определение гиперболы и параболы, аналогичное определению эллипса из задачи 1.

(б) Покажите, что каждая гипербола конгруэнтна кривой (=переводится движением плоскости в эту кривую), заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(в) Покажите, что каждая парабола подобна параболе $\{x^2 - y = 0\}$.

(г) Придумайте способ искать фокусы гиперболы и фокус параболы, аналогичный способу из пункта 1(в).

**Задача 3.** Покажите, что каждая непустая коника в $\mathbb{R}^2$ конгруэнтна одной из следующих кривых:

(1) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; (2) гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; (3) парабола $a^2x^2 - y = 0$;

(4) пара прямых $xy = 0$; (5) двойная прямая $x^2 = 0$; (6) точка $x^2 + y^2 = 0$.

**Задача 4.** (а) Пусть $q(x, y, z)$ — невырожденная квадратичная форма (= ранг её матрицы в каком-нибудь базисе равен 3). Докажите, что если множество $\{q(x, y, z) = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ непусто, то оно конгруэнтно одной из следующих поверхностей:

(1) эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; (2) однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

(3) двуполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

(б) Пусть $Q(x, y, z)$ — произвольный многочлен степени 2 (необязательно однородный). Докажите, что если множество $\{Q(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая поверхность, не являющаяся объединением семейства параллельных прямых, то она конгруэнтна либо одной из квадрик пункта (а), либо одной из следующих квадрик:

(4) эллиптический параболоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 1$; (5) гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - z = 1$.