Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 17. Ортогоналы и ортогональные дополнения

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение 1. Ортогонализацию Грама–Шмидта набора векторов $v_1, v_2, v_3, \ldots$ в $\mathbb{R}^n$ можно провести двумя способами (с одинаковым результатом).

(1) Заменить v_1 на $u_1 := \mathrm{norm}(v_1)$, заменить v_2 на $u_2 := \mathrm{norm}(v_2 - (v_2, u_1)u_1)$, заменить v_3 на $u_3 := \mathrm{norm}(v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2), \ldots$, где $\mathrm{norm}(v) := \frac{v}{\sqrt{(v,v)}}$.

(2) Заменить v_1 на u_1 как выше, v_2 на $\tilde{u}_2 = v_2 - (v_2, u_1)u_1$, заменить v_3 на $\tilde{u}_3 = v_3 - (v_3, u_1)u_1, \ldots$. Продолжать по индукции (применить предыдущий шаг к набору $\tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \ldots$).

Задача 1. (а) Примените ортогонализацию Грама–Шмидта к базису в $\mathbb{R}^3$, образованному столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

(б) Какую версию ортогонализации Грама–Шмидта лучше использовать в пункте (а), чтобы при приближенных вычислениях (члены с ε^2 и выше не учитываются) всё равно получался бы базис, близкий к ортонормальному?

Определение 2. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — симметричная билинейная форма на конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}$. Ортогоналом подпространства $U \subset V$ относительно формы B называется подпространство:

$$U^{\perp} := \{w \in V \mid B(u, w) = 0 \text{ для всех } u \in U\}.$$

Задача 2. Найдите ортогонал $U^{\perp}$ к гиперплоскости $U = \{x_1 = 0\}$ относительно следующих билинейных форм на $\mathbb{R}^3$:

(а) $B(u, v) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$; (б) $B(u, v) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$;
(в) $B(u, v) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$; (г) $B(u, v) = x_2y_2 + x_3y_3$.

Через (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) обозначаются координаты векторов u и v, соответственно.

Задача 3. (а) Существует ли такая невырожденная билинейная форма на $\mathbb{R}^{2n}$, что $U = U^{\perp}$ относительно этой формы, и при этом $\dim U = n$?

(б) Тот же вопрос для $\dim U > n$.

Задача 4. Для каждого пункта задачи 2 выясните, раскладывается ли пространство $\mathbb{R}^3$ в прямую сумму $U \oplus U^{\perp}$.

Задача 5. Пусть B — билинейная форма на $\mathbb{R}^4$, заданная в стандартном базисе матрицей Грама:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 3 \\ 5 & 0 & 12 & 0 \\ 10 & 12 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

а $U \subset \mathbb{R}^4$ — пространство решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Выясните, раскладывается ли $\mathbb{R}^4$ в прямую сумму подпространств U и $U^{\perp}$. Если раскладывается, то представьте вектор $v = (-8, 6, 15, 6)$ в виде суммы $v = u + u^{\perp}$, где $u \in U$, а $u^{\perp} \in U^{\perp}$.