Геометрия и алгебра, весенний семестр 2020 г.

Семинар 18. Сигнатура квадратичной формы

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение 1. Пусть $Q : V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма на конечномерном евклидовом пространстве V. Сигнатурой формы Q называется пара чисел (p, q), где p и q — количество положительных и отрицательных, соответственно, собственных чисел матрицы Грама формы Q в каком-нибудь ортонормированном базисе.

Задача 1. Найдите сигнатуру квадратичных форм на $\mathbb{R}^n$:
(а) $x_1^2 - x_2^2$; (б) x_1x_2; (в) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Задача 2. Квадратичная форма в стандартном базисе в $\mathbb{R}^4$ имеет матрицу Грама с
(а) элементами 2 на диагонали и 1 вне неё;
(б) элементами 1 на диагонали и 2 вне неё;
К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому ортонормированному базису?
(в) Можно ли ещё сильнее упростить матрицу Грама, перейдя к необязательно ортонормированному базису?

Задача 3. Докажите, что если Q — квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$, то её сигнатура (p, q) на самом деле не зависит от выбора скалярного произведения на $\mathbb{R}^n$, и может быть определена инвариантно следующим образом:
(а) $p + q$ совпадает с рангом матрицы квадратичной формы Q в произвольном базисе (не обязательно ортонормированном);
(б) p совпадает с максимально возможной размерностью подпространства $U \subset \mathbb{R}^n$, на котором форма $Q|_U$ положительно определена.

Задача 4. Найдите сигнатуру квадратичных форм из задачи 2 с помощью критерия Сильвестра. Убедитесь, что ответ согласуется с ответами в пункте 2(в).

Задача 5. Существует ли на $\mathbb{R}^4$ квадратичная форма с главными угловыми минорами:
(а) $M_1 < 0,\ M_2 = 0,\ M_3 < 0,\ M_4 > 0$;
(б) $M_1 < 0,\ M_2 = 0,\ M_3 > 0,\ M_4 > 0$;
(в) $M_1 < 0,\ M_2 = 0,\ M_3 = 0,\ M_4 > 0$?

Задача 6. Найдите сигнатуру квадратичной формы Q на пространстве вещественных $n \times n$-матриц:
(а) $n = 2,\ \ Q(A) = \det(A)$;
(б) n — произвольное, $\ Q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$.

Задача 7. Квадратичная форма в некоем ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^n$ имеет матрицу с элементами a на диагонали и b вне неё. К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому ортонормированному базису?

Задача 8 ($\star$)**.** Докажите, что для каждого обратимого оператора T в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ найдётся такой ортогональный базис $v_1, \ldots, v_n$, что базис $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ тоже ортогонален.