Алгебра и геометрия, весенний семестр 2020 г.

Листок 2. Проективная геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Даны две различные прямые l и l' в аффинной карте $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$. Известно, что проективное преобразование $T : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ переводит точки a, b, $c \in l$ в точки a', b', $c' \in l'$. Постройте одной линейкой образ точки $d \in l$ при преобразовании T.

Задача 2. Постройте изоморфизмы групп:

(а) $S_3 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2)$; (б) $S_4 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_3)$; (в) $A_5 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_4)$; (г)* $S_5 \simeq PGL_2(\mathbb{F}_5)$.

Задача 3. Докажите, что центр данной окружности на евклидовой плоскости нельзя построить с помощью одной только линейки.

Задача 4. Найдите количество проективных подпространств размерности k в проективном пространстве размерности n над полем из q элементов.

Задача 5 (Код Хэмминга)**.** (а) Выпишите матрицу инцидентности для точек и прямых в плоскости Фано.

(б) Пусть H_1 — множество слов из нулей и единиц, полученных в качестве строк матрицы из пункта (а). Докажите, что расстояние Хэмминга между любыми двумя словами w, $w' \in H_1$ не меньше трёх.

(в) Пусть H_2 — множество слов, полученных из слов множества H_1 заменой 0 на 1, а 1 —на 0. Рассмотрим множество $H = H_1 \cup H_2 \cup \{0000000, 1111111\}$. Покажите, что расстояние Хэмминга между любыми двумя словами из H по-прежнему не меньше трёх. Сколько всего слов в H?

(г) Придумайте удобный способ кодировать все слова длины 4 из нулей и единиц с помощью слов из H.

Задача 6 (Недезаргова плоскость)**.** Приведите пример плоскости, которая удовлетворяет трём аксиомам проективной плоскости, но в которой неверна теорема Дезарга.

Задача 7 (Вращения)**.** Напомним, что группа $SO_3(\mathbb{R})$ вращений трёхмерного пространства состоит из всех таких вещественных 3×3-матриц A, что $AA^t = I$ и $\det A = 1$. Индуцируем на $SO_3(\mathbb{R})$ топологию с помощью стандартной топологии на вещественном пространстве 3×3-матриц.

(а) Докажите гомеоморфизм топологических пространств: $SO_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{RP}^3$.

(б) Приведите пример петли в $SO_3(\mathbb{R})$, которую нельзя стянуть в точку. Покажите, что если пройти по этой петле дважды, то полученная петля уже стянется в точку.

Задача 8 (Кватернионы)**.** Определим специальную унитарную группу $SU_2(\mathbb{C})$ как группу всех таких комплексных 2×2-матриц A, что $A\overline{A}^t = I$ и $\det A = 1$. Индуцируем на $SU_2(\mathbb{C})$ топологию с помощью стандартной топологии на комплексном пространстве 2×2-матриц.

(а) Докажите, что $SU_2(\mathbb{C})$ изоморфна группе кватернионов с единичной нормой, и что этот изоморфизм групп индуцирует гомеоморфизм топологических пространств $SU_2(\mathbb{C}) \simeq S^3$.

(б) Постройте сюръективный гомоморфизм $SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$ и покажите, что с топологической точки зрения этот гомоморфизм задаёт двулистное накрытие $S^3 \to \mathbb{RP}^3$.