

Семинар 1. Проекции

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

В первых трёх задачах действие происходит в вещественном аффинном координатном пространстве с координатами  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Определение.** Центральной проекцией точки  $A$  из точки  $O$  (центра проекции) на гиперплоскость  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  называется точка пересечения  $A'$  (если она существует) прямой  $OA$  и гиперплоскости  $\Pi$ .

**Задача 1.** На плоскости дан отрезок  $AB$  с концами  $A = (1, 0)$  и  $B = (2, 0)$ . Какие подмножества прямой можно получить при центральной проекции отрезка  $AB$  из точки  $O \in \mathbb{R}^2$  на прямую  $\Pi = \{x_1 = 0\}$ ? (Ответ зависит от выбора точки  $O$ .)

**Задача 2.** (а) Какой фигурой может быть проекция треугольника на плоскость в  $\mathbb{R}^3$ , если центр проекции не лежит в плоскости треугольника? (Ответ зависит от выбора центра проекции.)

(б) Тот же вопрос для круга  $\{(x_1, x_2, 1) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ .

**Задача 3** (Теорема Дезарга). (а) Докажите, что если прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  на плоскости пересекаются в одной точке  $O$ , то точки пересечения прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$  лежат на одной прямой. (Иными словами, если у двух треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  есть центр перспективы, то у них есть и ось перспективы.)

(б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

**Задача 4.** (а) Докажите, что каждую тройку прямых в координатной векторной плоскости над полем  $\mathbb{F}$  с координатами  $(x, y)$  можно перевести линейным преобразованием в тройку прямых  $\{y = 0\}$ ,  $\{x = 0\}$  и  $\{y = x\}$ .

(б) Куда перейдёт прямая  $\{y = ax\}$ , где  $a \in \mathbb{F}$ , при преобразовании из пункта (а)?

**Задача 5.** На вещественной аффинной плоскости даны две прямые. При проекции с центром в точке  $O$  точки  $A, B, C$  и  $D$  на первой прямой перешли в точки  $A', B', C'$  и  $D'$ , соответственно, на второй прямой. Докажите, что  $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$  (двойное отношение четырёх точек не меняется при проекциях).

**Задача 6.** На вещественной аффинной плоскости даны две прямые. После композиции нескольких проекций точки  $A, B, C$  и  $D$  на первой прямой перешли в точки  $A', B', C'$  и  $D'$ , соответственно, на второй прямой. Постройте одной линейкой точку  $D'$ , если даны все остальные точки.