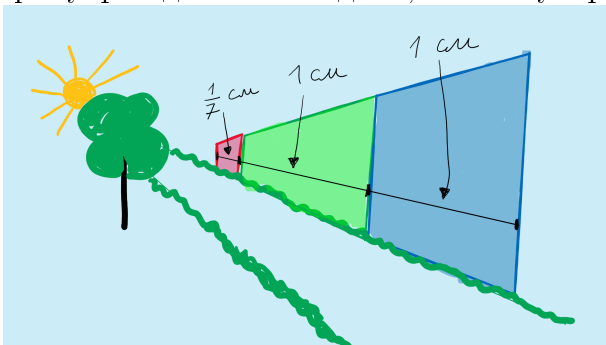


Семинар 2. Проективные плоскости

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. На прямолинейной улице стоят друг за другом красный, зелёный и синий дома. Известно, что ширина фасадов красного и синего дома равна 10 м. Найдите ширину фасада зелёного дома, используя фотографию.



Задача 2. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

- (1) с каждой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;
- (2) для каждой пары маршрутов найдётся, и притом единственная, остановка, на которой можно пересест с одного из этих маршрутов на другой;

Известно, что на каждом маршруте ровно три остановки, и маршрутов больше одного. Сколько автобусных маршрутов в городе?

Задача 3. Опишите проективную плоскость над полем из трёх элементов. Описание можно дать в виде графа, матрицы инцидентности или эскиза карточек для игры в Доббль. (Из описания должно быть понятно, какие точки лежат на каких прямых.)

Задача 4. В городе 57 автобусных маршрутов, удовлетворяющих правилам (1) и (2) из задачи 2. Известно, что на каждом маршруте не менее трёх остановок. Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

Задача 5 (Топология проективных пространств). (а) Докажите, что вещественная проективная прямая гомеоморфна окружности, то есть $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$.

(б) Докажите, что комплексная проективная прямая гомеоморфна сфере, то есть $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$.

(в) Докажите, что из вещественной проективной плоскости \mathbb{RP}^2 можно вырезать открытый двумерный диск так, что останется лента Мёбиуса.

(г)* Докажите, что $SO_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{RP}^3$.