Проективная геометрия, 4-й модуль 2020 г.

Семинар 3. Гармонические четвёрки

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. На евклидовой плоскости даны два смежных угла AOB и BOA'. Докажите, что двойное отношение прямых OA, OB и биссектрис углов AOB и AOB', соответственно, равно -1.

Определение. Четвёрка точек на проективной прямой называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1.

Задача 2. (а) Проверьте, что точки с однородными координатами $(0 : 1)$, $(1 : 0)$, $(1 : 1)$ и $(1 : -1)$ образуют гармоническую четвёрку.

(б) Пусть $\mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ — аффинная карта. Проверьте, что бесконечно удалённая точка в $\mathbb{P}^1$ и точки A, B и C на аффинной карте образут гармоническую четвёрку тогда и только тогда, когда A — середина отрезка BC.

Определение. Четвёрка прямых на проективной плоскости называется *гармонической*, если все прямые проходят через одну и ту же точку O, и их точки пересечения с любой прямой, не проходящей через O, образуют гармоническую четвёрку точек.

Задача 3 (Полный четырёхсторонник)**.** Пусть A, B, C и D — точки на проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим через X, Y и Z точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD, и AD и BC, соответственно. Докажите, что XY, BD, YZ и AC — гармоническая четвёрка прямых.

Задача 4 (Устный тура Турнира городов 2019)**.** Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J. Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P. Докажите, что $PA = PJ$.

Задача 5. Используя полный четырёхсторонник из задачи 3 и проективные преобразования постройте гомоморфизм $S_4 \to S_3$, где S_4 переставляет точки A, B, C и D, а S_3 — точки X, Y и Z.