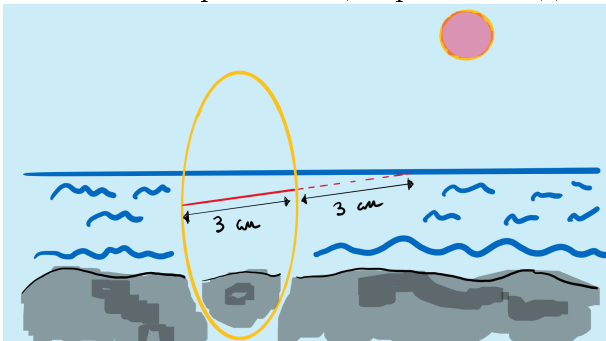


Семинар 4. Коники

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Дополните рисунок колеса обозрения, нарисовав центр колеса. В каком отношении изображение центра колеса делит его диаметр?



**Задача 2** (Пифагоровы тройки). Найдите все точки с целыми координатами на вещественной проективной конике, заданной уравнением  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ .

**Задача 3** (Универсальная тригонометрическая подстановка). (а) Придумайте такие рациональные функции  $p(t)$  и  $q(t)$ , что все точки  $(x, y)$  с рациональными координатами на единичной окружности параметризуются как  $(p(a), q(a))$ , где параметр  $a$  пробегает все рациональные числа.

(б) Как эта задача связана с задачей 2?

**Задача 4** (Рациональная параметризация окружности). (а) На вещественной плоскости дана окружность  $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ , прямая  $l = \{x = 1\}$  и точка  $p = (-1, 0) \in C$ . Отображение (не всюду определённое) проекции  $\pi : l \rightarrow C$  прямой  $l$  на конику  $C$  сопоставляет точке  $q \in l$  точку пересечения прямой  $pq$  с коникой  $C$ . Найдите явные формулы для координат точки  $\pi(q)$ , если  $q = (0, a)$ .

(б) Как эта задача связана с задачей 3?

**Задача 5** (Гиперболические косинусы и синусы). (а) Найдите все рациональные точки на гиперболе (на вещественной плоскости), заданной уравнением  $y^2 - x^2 = 1$ .

(б) Сформулируйте и докажите результаты аналогичные задачам 3 и 4 в случае гиперболы.