

Семинар 5. Проективная двойственность

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Вещественная проективная коника, заданная уравнением $Q(x_0, x_1, x_2)$ пересекает аффинную карту $l(x_0, x_1, x_2) \neq 0$. Определите тип полученной аффинной коники (эллипс, парабола, гипербола, пара прямых, ...).

(а) $Q = x_0^2 - x_1x_2, l = x_0$;

(б) $Q = x_0^2 - x_1x_2, l = x_1$;

(в) $Q = x_0^2 - x_1x_2, l = x_0 + x_1$;

(г) $Q = x_0^2 - x_0x_1 - x_0x_2, l = x_1$.

Задача 2. Найдите полярные точки $(1 : 2 : 0)$, $(1 : 1 : 1)$ и $(2 : 3 : 1)$ относительно коники $\{x_0^2 - x_1x_2 = 0\}$. В качестве самопроверки убедитесь, что найденные прямые пересекаются в одной точке.

Задача 3. (а) На проективной плоскости даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько коник проходит через все 5 точек?

(б) На проективной плоскости даны 5 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Сколько коник касается всех пяти прямых?

Задача 4 (Задача Аполлония). На евклидовой плоскости даны три окружности, никакие две из которых не касаются друг друга. Какое максимальное количество окружностей может касаться всех трёх окружностей?

Задача 5. На проективной плоскости даны 4 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Также дана прямая, не содержащая ни одной из данных точек. Какое максимальное количество коник проходит через 4 данные точки и касается данной прямой?

Задача 6. Постройте одной линейкой полярную точку относительно данной окружности для

(а) точки вне окружности;

(б) точки внутри окружности.