Алгебра и геометрия, осенний семестр 2019 г.

Задачи для подготовки к экзамену.

факультет математики, НИУ ВШЭ

1. Материал первого модуля

1.1. Алгоритм Евклида.

Задача 1. Птицефабрика фасует яйца в коробки, рассчитанные либо на дюжину яиц, либо на 25 яиц. Сможет ли птицефабрика отсчитать покупателю ровно 399 яиц, используя только такие коробки? Предполагается, что в каждой коробке лежит ровно столько яиц, на сколько она рассчитана.

Задача 2. Найдите все решения в целых числах диофантова уравнения

$$16x + 27y = 625.$$

Задача 3. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^{32} - 1$ и $x^{12} - 1$.

Задача 4 (Китайская теорема об остатках)**.** Найдите все решения системы сравнений

$$x \equiv 5 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 7, \quad x \equiv 4 \pmod{15}.$$

Задача 5. Найдите натуральное число x, не превосходящее 120, такое что

$$x \equiv 3 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 5, \quad x \equiv 1 \pmod 3.$$

Задача 6. Найдите квадратный многочлен f с рациональными коэффициентами, такой что

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 10, \quad f(2) = 100.$$

Задача 7. Решите сравнение

$$100x \equiv 997 \pmod{1001}.$$

Задача 8. Решите уравнения в целых числах.

(а) $173x + 95y = 8$; (б) $57x + 102y = 4$; (в) $91x + 1001y = 5$.

Задача 9. Решите уравнения в натуральных числах.

(а) $173x + 95y = 1984$; (б) $57x + 102y = 2019$.

Задача 10. Найдите многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени не выше трёх, значения которого в точках 0, 1, 2 и 3 совпадают со значениями функции

$$\text{(а) } 2^x; \quad \text{(б) } \frac{1}{x+1}; \quad \text{(в) } \sin(\frac{\pi x}{2}).$$

Задача 11. Найдите такие многочлены f и g с рациональными коэффициентами, что

$$f(x)(x^3 - 2) + g(x)(2 + 3x + x^2) = 1,$$

и при этом степень f и g не больше 2.

Задача 12 (Избавление от иррациональности в знаменателе)**.** Найдите такие рациональные числа a, b и c, что

$$\frac{1}{(2 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}.$$

1.2. **Комплексные числа и целые гауссовы числа.**

Задача 13. Представьте следующие комплексные числа в виде $a+bi$, где $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\text{(а) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}; \quad \text{(б) } \sqrt{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}; \quad \text{(в) } \sqrt{1+i\sqrt{3}}.$$

Задача 14. Найдите все комплексные решения уравнения

(а) $z^3+3z^2+3z+3=0$; (б) $z^4+4=0$; (в) $(z+i)^4=(z-i)^4$; (г) $z^4+(z-4)^4=32$.

Задача 15. Найдите сумму квадратов длин всех диагоналей в правильном семиугольнике, вписанном в единичную окружность (сторона не считается диагональю).

Задача 16. Постройте циркулем и линейкой правильный пятиугольник с данной стороной.

Задача 17 ($\star$)**.** Докажите, что число $\frac{2+i}{2-i}$ не является корнем n-ой степени из единицы ни для какого натурального n.

1.3. **Кольца и поля.**

Задача 18. *Полем из трёх элементов* называется множество из трёх элементов (обозначим их через 0, 1 и 2) с операциями сложения и умножения, заданными следующими таблицами:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

,

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

.

Проверьте ассоциативность и дистрибутивность этих операций. Проверьте, что из каждого элемента можно вычесть любой другой элемент, и каждый элемент можно поделить на любой другой ненулевой элемент.

Задача 19. (а) Рассмотрим множество $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ остатков 0, 1, 2, 3, 4 при делении на 5. Введём на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$a+b=(a+b) \pmod 5,$$
$$ab=ab \pmod 5,$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в $\mathbb{Z}$. Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 20. Пусть в поле $\mathbb{F}$ выполнено тождество $1+1=0$. Докажите или опровергните: уравнение $\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=a$ будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого нечётного натурального n. (Предупреждение: тождество $1+1=0$ выполнено не только в поле из двух элементов, поэтому разбор примера $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ не является полным решением.)

Задача 21. Пусть в поле $\mathbb{F}$ тождество $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}=0$ не выполнено ни для какого натурального n. Докажите или опровергните: уравнение

$$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=a$$

будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого натурального n.

Задача 22 (Единственность нуля)**.** Докажите, что в кольце не может быть двух различных нулевых элементов, то есть элементов 0, для которых выполнено тождество $0 + a = a$. Доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 23. Докажите, что в каждом кольце выполняются тождества:

$$\text{(а) } a \cdot 0 = 0; \quad \text{(б) } -a = (-1) \cdot a; \quad \text{(в) } (-a) \cdot b = (-ab).$$

Как и прежде, доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 24 (Делители нуля)**.** (а) Докажите, что если

$$ab = 0$$

для двух элементов a и b поля, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.

(б) Приведите пример кольца, в котором есть делители нуля, то есть, два ненулевых элемента a и b, таких что $ab = 0$.

1.4. **Арифметика (числа и многочлены).**

Задача 25. (а) Докажите, что число вида $4k + 3$ не представляется в виде суммы двух полных квадратов ни для какого натурального k.

(б) Докажите, что если целые числа m и n представляются в виде суммы двух полных квадратов, то их произведение mn тоже представляется в виде суммы двух полных квадратов (и даже двумя способами).

Задача 26. Для каких остатков a по модулю p сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

разрешимо в целых числах, если p равно

(а) 5, (б) 13, (в) 23?

Задача 27. Докажите, что если p — нечётное простое число, то сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

разрешимо в целых числах ровно для половины всех ненулевых остатков a по модулю p.

Задача 28. Докажите, что каждого простого числа p сравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \mod p$$

имеет нетривиальное решение в целых числах (*тривиальное решение* — это решение $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \mod p$).

Задача 29. Пусть p — простое число. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \mod p$ не имеет решений в целых числах тогда и только тогда, когда $p \equiv 3 \mod 4$.

Задача 30. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 31. (а) Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то n обязательно является простым числом. (Простые числа вида $2^n - 1$ называются *простыми числами Мерсенна.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 32. (а) Докажите, что если число 2^n+1 простое, то n обязательно является степенью двойки, то есть, $n = 2^m$ для некоторого натурального m. (Простые числа вида $2^{2^m}+1$ называются *простыми числами Ферма.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 33. Пусть p — простое число.

(а) Докажите "тождество ленивого школьника":

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p.$$

(б) Докажите малую теорему Ферма: $n^p - n$ делится на p для любого натурального n.

(в) Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

Задача 34. Примените решето Эратосфена, чтобы найти все неприводимые многочлены степени не выше четырёх с коэффициентами в поле из двух элементов.

Задача 35. (а) Докажите для любого заданного поля $\mathbb{F}$, что существует бесконечно много неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1 и остальными коэффициентами из $\mathbb{F}$.

(б) Классифицируйте все неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. (Подсказка: используйте основную теорему алгебры.)

(в) Приведите пример неприводимого многочлена степени 5 над полем из двух элементов.

(г)* Докажите, что над полем из двух элементов существует неприводимый многочлен любой заданной степени.

Задача 36 ($\star$). Придумайте эффективный алгоритм разложения многочлена над полем из двух элементов на неприводимые множители. (Определение понятия "эффективный" должно быть частью решения. Обычно эффективным называют алгоритм, количество шагов в котором полиномиально зависит от количества битов, необходимого для ввода начальных данных. Например, чтобы задать многочлен степени n над полем из двух элементов необходимо n битов, так как потребуется указать значения 0 или 1 для коэффициентов при степенях x^{n-1}, x^{n-2},…, x и 1.)

Задача 37. Разложите на неприводимые множители в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен

$$x^4 + 4x^2 + x + 6.$$

Задача 38. (а) Найдите последние две цифры числа 2^{65537}.

(б) Найдите коэффициент при x и свободный член многочлена $(x+1)^{65537}$ в кольце многочленов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$. (Через $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ обозначается поле вычетов по модулю 2, также известное под именем "поле из двух элементов". Через $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ обозначается кольцо многочленов с коэффициентами в поле из двух элементов.)

Задача 39. Существуют ли такие иррациональные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что α^β рационально?

Задача 40 ($\star$). Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ — различные простые числа. Докажите, что сравнение

$$p^x + q^y \equiv 1 \pmod{pq}$$

разрешимо в натуральных числах.

1.5. **Матрицы и системы линейных уравнений.** Если не оговорено обратное, то здесь и далее все векторные пространства и уравнения рассматриваются над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Задача 41. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^n$$

для всех натуральных n.

Задача 42. Приведите к стандартному ступенчатому виду "таблицу умножения", то есть, матрицу 10×10, у которой на (i, j)-том месте стоит ij.

Задача 43. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Задача 44. (а) Докажите, что если $m \times n$-матрица A получается из матрицы A' элементарными преобразованиями строк, то системы из m однородных линейных уравнений на n неизвестных $AX = 0$ и $A'X = 0$ эквивалентны (то есть имеют одно и то же множество решений).

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для систем неоднородных линейных уравнений.

Задача 45. Найдите линейную зависимость между строками матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 46. Докажите, что если $m \times n$-матрица A' получается из матрицы A заменой i-той строки на сумму i-той и j-той строки, то $A' = (I_m + E_m^{ij})A$, где I_m — единичная $m \times m$-матрица, а E_m^{ij} — матрица того же размера с единственным ненулевым элементом (равным 1) на (i, j)-том месте.

Задача 47. Найдите матрицу обратную относительно умножения к матрице

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 48. (а) При каком условии на коэффициенты 2×2-матрица имеет обратную?

(б) Тот же вопрос для 3×3-матрицы.

Задача 49. Пусть A — квадратная матрица. Докажите, что следующие три условия эквивалентны.

(1) Матрицу A можно перевести в единичную матрицу элементарными преобразованиями строк.

(2) Матрица A имеет обратную относительно умножения.

(3) Система линейных уравнений $AX = 0$ имеет только нулевое решение.

Задача 50. Вычислите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}.$$

Задача 51. Пусть A и B — матрицы размера $m\times n$ и $n\times k$, соответственно. Докажите неравенство на ранги:

$$\mathrm{rk}\ AB \leq \min\{\mathrm{rk}\ A, \mathrm{rk}\ B\}.$$

Задача 52. Пусть A и B — квадратные матрицы. Докажите неравенство на ранги:

$$\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B).$$

Задача 53. В десяти копилках лежат 1, 2, 3,…, 10 монет. Разрешается добавлять по монете во все копилки, кроме одной. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, получить во всех копилках одинаковое количество монет?

Задача 54. (а) На ребрах тетраэдра написаны числа $b_1,\ldots, b_6$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1,\ldots, b_6$, для которых задача имеет решения.

(б) На вершинах куба написаны числа $b_1,\ldots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число на каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1,\ldots, b_8$, для которых задача имеет решения.

Задача 55. Клетки прямоугольной таблицы заполнены числами так, что каждое число является средним арифметическим чисел в четырёх соседних клетках (соседние=имеющие общую сторону). Можно ли восстановить числа во внутренних клетках таблицы по числам в граничных клетках?

Задача 56 ($\star$). На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

Задача 57 ($\star$). (а) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров другого стада. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если убрать условие, что вес коровы — целое число?

(в) Найдите ранг $(2n+1)\times(2n+1)$ матрицы, у которой на диагонали стоят нули, а все остальные коэффициенты равны либо 1, либо -1, причём сумма коэффициентов в каждой строке равна нулю.

1.6. **Векторные пространства.**

Задача 58. Докажите, что любые 3 вектора в $\mathbb{R}^2$ линейно зависимы.

Задача 59. В n-мерном пространстве даны $n+2$ вектора $v_1,\ldots, v_{n+2}$. Докажите, что можно найти такие скаляры $\lambda_1,\ldots, \lambda_{n+2}$ не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+2} v_{n+2} = 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+2} = 0.$$

Задача 60. Какие из следующих подмножеств являются вещественными подпространствами в $\mathbb{R}[x]$?

(а) $\{f \mid f(1) = 2\}$; (б) $\{f \mid f(1) = 0\}$; (в) $\{f \mid f$ делится на $(x^2+1)\}$.

Задача 61. Какие из следующих подмножеств являются комплексными подпространствами в $\mathbb{C}^2$?

(а) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$; (б) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = y\}$.

Задача 62. Являются ли линейно зависимыми над $\mathbb{R}$ векторы

(а) $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$? (б) $(1, 2, 3, 5)$, $(2, 3, 5, 8)$, $(3, 4, 7, 11) \in \mathbb{R}^4$?

Задача 63. Докажите, что для каждой пары подпространств U и V в векторном пространстве выполнено тождество, аналогичное формуле включений-исключений для множеств:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

Задача 64. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ два базиса в одном и том же векторном пространстве, а C — матрица перехода между ними, а именно:

$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$

Обозначим через x столбец координат некоторого вектора в первом базисе, а через y — столбец координат этого же вектора во втором базисе. Докажите, что

$$y = C^{-1}x.$$

Задача 65. Постройте базис над $\mathbb{R}$ в пространстве всех кососимметрических $n \times n$-матриц с вещественными коэффициентами. (Матрица $B = (b_{ij})_{1\leq i,j,\leq n}$ называется *кососимметрической*, если $b_{ij} = -b_{ji}$ для всех i и j.)

Задача 66. Пусть V — векторное пространство $n\times n$ матриц. Докажите, что каждая однородная линейная функция f на V представляется в виде:

$$f(X) = \operatorname{tr}(AX)$$

для некоторой матрицы A. (Через $\operatorname{tr}(B)$ обозначается след матрицы B, то есть сумма элементов на её главной диагонали.)

Задача 67. Можно ли представить $\sqrt[3]{4}$ как линейную комбинацию $a + b\sqrt[3]{2}$, где a и b — рациональные числа?

Задача 68. Представляется ли многочлен $1+x+x^2+x^3$ в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами многочленов

(а) $x + 1$, $(x + 1)^2$, $(x + 1)^3$? (б) $x - 1$, $(x - 1)^2$, $(x - 1)^3$?

Задача 69. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$.

(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

Задача 70. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

(а) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt{2}$, $1/(\sqrt{2}-1)$?

(б) Выразите вектор $(1+\sqrt{2})/(3-2\sqrt{2})$ как линейную комбинацию векторов 1 и $\sqrt{2}$.

(в) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt[3]{2}$, $1/(\sqrt[3]{2}-1)$?

(г) Можно ли выразить вектор $1/(\sqrt[3]{2}-1)$ как линейную комбинацию векторов 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}^2$?

Задача 71. Чему равна размерность поля комплексных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над полем

(а) рациональных чисел; (б) вещественных чисел; (в) комплексных чисел?

Задача 72. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$, если:

(а) x^2-2; (б) x^3-2; (в) x^4+4; (г) x^4+1; (д) x^4-2.

Задача 73. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Найдите число всех подпространств в координатной плоскости $\mathbb{F}_q^2$.

Задача 74 (Формула Тейлора)**.** Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a), f'(a),\ldots, f^{(n)}(a))$.

Задача 75 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек $a_0, a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a_0), f(a_1),\ldots, f(a_n))$.

Задача 76 ($\star$)**.** Пусть $U \subset \mathbb{F}_2^4$ — плоскость в 4-хмерном пространстве над полем из двух элементов. Найдите количество таких плоскостей $V \subset \mathbb{F}_2^4$, что $U \cap V = \{0\}$.

1.7. **Линейные операторы.**

Задача 77. (а) Покажите, что векторы 1 и i образуют базис в поле комплексных чисел, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$.

(б) Выпишите матрицу оператора умножения на комплексное число $a+bi$ в базисе $\{1, i\}$.

Задача 78. Найдите два линейных оператора T и U на $\mathbb{R}^2$, такие что $TU=0$, но $UT \neq 0$.

Задача 79. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор сдвига $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(x+a).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 80. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α. Найдите базис в $\mathbb{Q}(\alpha)$ (рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{Q}$), если:

(а) $\alpha = i$; (б) $\alpha = \sqrt[3]{2}$; (в) $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$; (г) $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$; (д) $\alpha = \pi$

Выпишите матрицу оператора умножения на α в найденном базисе.

Задача 81. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 82. Пусть A_1 и A_2 — две матрицы одного и того же оператора (в разных базисах) на n-мерном пространстве. Докажите, что существует обратимая $n \times n$-матрица P, такая что

$$A_2 = PA_1P^{-1}.$$

Задача 83. Найдите ядро и образ линейного оператора $T : \mathbb{F}^5 \mapsto \mathbb{F}^4$, заданного матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 17 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

Задача 84. Для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^3$ найдите ядро и образ оператора:

$$T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad T : u \mapsto [u, a].$$

Задача 85. Найдите ядро и образ оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше n. Напомним, что оператор дифференцирования — это оператор, который сопоставляет многочлену $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ его производную $f' := na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

2. Материал второго модуля

2.1. **Определители.**

Задача 86. Целые числа 1798, 2139, 3255, 4867 делятся на 31. Без всяких вычислений покажите, что определитель четвёртого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

также делится на 31.

Задача 87. Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}.$$

Задача 88. Покажите, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

является квадратом многочлена от a, b, c и d.

Задача 89. Найдите определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Задача 90. Найдите определитель матрицы размера $2n \times 2n$, у которой на главной диагонали стоят числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$, на побочной диагонали — числа $\mu_1, \ldots, \mu_{2n}$, а в остальных местах — нули. (Главная диагональ квадратной матрицы идёт из левого верхнего угла в правый нижний, а побочная — из левого нижнего угла в правый верхний.)

Задача 91. (а) Обозначим через $\mathbb{Z}^2$ решётку векторов с целыми координатами в $\mathbb{R}^2$. Пусть $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейный оператор, такой что его матрица в стандартном базисе имеет целые коэффициенты. Докажите, что отображение $T|_{\mathbb{Z}^2} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ является биекцией тогда и только тогда, когда $\det(T) = \pm 1$.

(б) На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

Задача 92. Для каких простых чисел $p \in \mathbb{N}$ система сравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 0 \pmod p \\ 2x + 3y + z \equiv 0 \pmod p \\ 3x + y + 2z \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

имеет ненулевое решение?

Задача 93 ($\star$). Вычислите определитель $n \times n$ матрицы, у которой на диагонали стоят числа $1 + \mu_1, \ldots, 1 + \mu_n$, а вне диагонали — единицы.

Задача 94 ($\star$). Найдите определитель $n \times n$ матрицы, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит $i + j$, если $i \neq j$ и $i + j + \mu_i$, если $i = j$.

2.2. **Аффинные пространства.**

Задача 95. Найдите уравнение гиперплоскости в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$, проходящей через точки $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 4, 1, 2)$.

Задача 96. Опишите все случаи взаимного расположения плоскости и прямой в четырёхмерном аффинном пространстве.

Задача 97. Определите тип коники (эллипс, гипербола, парабола, пара прямых,...):

(а) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;

(б) $4x^2 + 6xy + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$;

(в) $-10x^2 + 6xy - y^2 + 4x + y + 2 = 0$.

Задача 98. Определите тип квадрики $x^2 + 4xy + 2xz + z^2 + 3x + z - 6 = 0$ (эллипсоид, однополостный или двуполостный гиперболоид,...).

Задача 99. В настольной игре Сет у каждой карточки есть четыре признака (цвет, форма, количество, заполнение), причём каждый признак принимает три значения. Три карточки образуют сет, если по каждому признаку они либо все одинаковы (например, одного цвета), либо все разные (например, никакие две не совпадают по цвету). Покажите, что можно отождествить карточки с точками в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ над полем $\mathbb{F}^3$ из трёх элементов так, что каждые три карточки, составляющие сет, будут лежать на одной прямой.

Задача 100. Считая, что объём единичного целочисленного кубика равен единице, выразите объём n-мерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами в точках целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ через число целых точек, находящихся строго внутри самого Π, строго внутри его $(n-1)$-мерных граней, строго внутри $(n-2)$-мерных граней и т.д.

Задача 101 $(\star)$**.** Все вершины параллелепипеда в трёхмерном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что строго внутри него есть ровно 9 целочисленных точек.

2.3. **Евклидовы пространства.** Во всех задачах этого раздела дело происходит в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, и через $x_1,\ldots, x_n$ обозначены координаты в некотором ортонормированном базисе.

Задача 102. Докажите, что площадь $|\omega(u,v)|$ параллелограмма, натянутого на векторы u и v можно считать по формуле:

(а)

$$|\omega(u,v)| = \sqrt{\det\begin{pmatrix}(u,u) & (u,v)\\ (v,u) & (v,v)\end{pmatrix}}.$$

(б)

$$|\omega(u,v)| = |u||v||\sin\varphi|.$$

Задача 103. Докажите неравенство Коши–Буняковского–Шварца в $\mathbb{R}^n$:

$$|(u,v)| \le |u||v|.$$

Задача 104. Найдите ортогональный базис в подпространстве:

(а) заданном уравнением $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;
(б) порождённом векторами $(1,2,2,-1)$, $(1,1,-5,3)$, $(3,2,8,-7)$;
(в) в ортогональном дополнении к предыдущему подпространству.

Задача 105. Рассмотрим стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ и ограничим его на гиперплоскость $U = \{x_1+\ldots+x_n = 0\}$. Через $e_1,\ldots, e_n$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

(а) Найдите матрицу Грама скалярного произведения на U в базисе $\alpha_1 = e_1-e_2,\ldots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$.

(б) Найдите ортонормальный базис в U, применив ортогонализацию Грама-Шмидта к базису $\alpha_1,\ldots, \alpha_{n-1}$.

Задача 106. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ — гиперплоскость, натянутая на векторы $(1,2,3,1)$, $(1,2,3,2)$ и $(1,1,1,1)$.

(а) Найдите вектор единичной длины, перпендикулярный гиперплоскости Π.

(б) Найдите расстояние от точки $(6,3,6,5) \in \mathbb{R}^4$ до гиперплоскости Π.

(в) Найдите длину ортогональной проекции вектора $(6,3,6,5)$ на гиперплоскость Π.

Задача 107. Найдите расстояние от точки $p = (2,1,-3,4)$ до плоскости $\Pi = \{2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 + 19 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0\}$

Задача 108. Найдите косинус угла между вектором $(1,2,3,4)$ и подпространством $\{x_1+x_2+x_3+x_4=1\}$.

Задача 109. Найдите расстояние между плоскостями $\Pi_1=\{x_1+x_3+x_4-2x_5-2=0,\ x_2+x_3-x_4-x_5-3=0,\ x_1-x_2+2x_3-x_5-3=0\}$; $\Pi_2=(1,-2,5,8,2)+\langle(0,1,2,1,2),(2,1,2,-1,1)\rangle$.

Задача 110. Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

Задача 111. Докажите, что поворот R в $\mathbb{R}^3$ на угол φ (против часовой стрелки) относительно оси, порождённой единичным вектором e, задаётся формулой:

$$R(v)=(1-\cos\varphi)(v,e)e+\cos\varphi\ v+\sin\varphi\ [e,v].$$

Задача 112. Найдите матрицу поворота в $\mathbb{R}^3$:
(а) на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x_1=x_2=x_3\}$;
(б) на угол φ относительно прямой $\{x_1=x_2=x_3\}$;
(в) на угол φ относительно прямой $\{x_1=px_2=qx_3\}$, где $p,q\neq 0$.

Задача 113. (а) Как выглядят матрицы операторов из группы $SO_2(\mathbb{R})$ в ортонормальном базисе?
(б) Как выглядят матрицы операторов из группы $O_2(\mathbb{R})$ в ортонормальном базисе?
(в) Классифицируйте все движения евклидовой аффинной плоскости.

Задача 114. Пусть $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — оператор на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а A — его матрица в некотором ортономированном базисе. Докажите, что T сохраняет расстояния тогда и только тогда, когда $AA^t=I$.

Задача 115. Пусть $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — движение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Покажите, что в некотором ортономированном базисе матрица оператора T будет блочно-диагональной с 1×1 или 2×2 блоками вида:

$$(1)\,;\quad (-1)\,;\quad \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

(а) при $n=2$; (б) при $n=3$; (в*) при произвольном n.

Задача 116. ($\star$) Найдите максимальную площадь равностороннего треугольника, который можно разместить (нестрого) внутри единичного куба.

Задача 117. $\star$ Докажите, что для каждого обратимого оператора A в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ найдётся такой ортогональный базис $v_1,\ldots,v_n$, что базис $Av_1,\ldots,Av_n$ тоже ортогонален.

2.4. **Билинейные и квадратичные формы.**

Задача 118. Найдите поляризацию и сигнатуру следующих квадратичных форм на $\mathbb{R}^2$:
(а) $x_1^2+x_2^2$; (б) $2x_1x_2$; (в) $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$; (г) $x_1^2-x_2^2$.

Задача 119. Матрица Грама билинейной формы $b(\cdot,\cdot)$ в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

(а) Является ли форма b положительно определённой?

(б) Найдите базис, в котором матрица Грама формы b диагональна.

(в) Существует ли базис, в котором матрица Грама формы b диагональна, а на диагонали стоят числа 1, -1, -1?

Задача 120. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ два базиса в одном и том же векторном пространстве, а C — матрица перехода между ними, а именно:

$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$

Обозначим через A матрицу некоторой квадратичной формы в первом базисе, а через B — матрицу этой же формы во втором базисе. Докажите, что

$$B = C^t AC.$$

Задача 121. Найдите размерность вещественного пространства симметрических $n \times n$ матриц с вещественными коэффициентами.

Задача 122. Пусть $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Докажите, что каждая билинейная форма представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной форм, причём такое представление единственно.

Задача 123. Пусть V пространство вещественных 2×2 матриц. Определим на V форму

$$(A, B) = \frac{1}{2}\left(\det(A + B) - \det(A) - \det(B)\right)$$

(такая форма называется *смешанным определителем*).

(а) Докажите, что форма $(\cdot, \cdot)$ билинейна и симметрична.

(б) Выпишите матрицу формы $(\cdot, \cdot)$ в стандартном базисе.

Задача 124. Найдите канонический вид квадратичных форм над $\mathbb{R}$:

(а) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$; (б) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

Задача 125. Докажите, что у положительно определенной квадратичной формы над $\mathbb{R}$ диагональные значения матрицы Грама положительны. Верно ли обратное?

Задача 126. Докажите, что каждая квадратичная форма на $\mathbb{C}^n$ заменой координат приводится к сумме квадратов:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2,$$

причём количество квадратов k (называемое *рангом формы*) не зависит от выбора координат.

Задача 127. Найдите сигнатуру квадратичной формы Q на пространстве вещественных $n \times n$-матриц:

(а) $n = 2$, $Q(A) = \det(A)$;

(б) n — произвольное, $Q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$.

Задача 128. Докажите, что всякую билинейную форму $b(x, y)$ ранга 1 можно привести к виду $f(x)g(y)$, где $f(x)$ и $g(y)$ — линейные формы. К какому самому простому виду эту форму можно привести заменой базиса?

3. Материал третьего модуля

3.1. Собственные числа и векторы линейных операторов.

Задача 129. Найдите собственные значения, собственные и корневые подпространства оператора, заданного матрицей

$$(а)\ \begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix};\quad (б)\ \begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix};\quad (в)\ \begin{pmatrix}2 & 6 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -6\end{pmatrix};\quad (г)\ \begin{pmatrix}0 & -2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 130. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы размера $n \times n$, все коэффициенты которой равны -1.

Задача 131. Пусть A — матрица линейного оператора из $\mathbb{R}^3$ в себя в стандартном базисе. Известно, что $AA^t = I$ (через I обозначается единичная матрица), и $\det(A) = 1$. Покажите, что оператор является поворотом евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ (относительно стандартного скалярного произведения).

Задача 132. Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ найдите собственные числа и собственные векторы оператора на $\mathbb{C}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Задача 133. Найдите явную формулу, выражающую n-ое число Фибоначчи через n.

Задача 134. Некоторый оператор T на векторном пространстве удовлетворяет уравнению

$$T^2 - 5T + 6I = 0.$$

где I — тождественный оператор. Чему могут быть равны собственные значения оператора T?

Задача 135. Вычислите коэффициенты матрицы

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{10}$$

с точностью до второго знака после запятой включительно.

Задача 136. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ — многочлен, а A — вещественная 2×2-матрица с собственными значениями λ_1 и λ_2.

(а) Докажите, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$f(A) = f(\lambda_1)\frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(\lambda_2)\frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(б) Придумайте аналогичную формулу для случая $\lambda_1 = \lambda_2$.

Задача 137. Существует ли вещественная 3×3 матрица A, удовлетворяющая уравнению

$$A^2 + A + 7I = 0?$$

Через I обозначена единичная 3×3 матрица.

Задача 138. Дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Выпишите явную формулу для
(а) A^n; (б) e^A.

Задача 139. Вычислите $\sqrt{A}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нужно найти все возможные ответы.

Задача 140. Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n; \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Найдите явную формулу, выражающую a_n через n.

Задача 141. Вычислите A^{2021}, где

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 142. Вычислите A^{2021}, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e & \pi & \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & e^{\pi} \\ 0 & 0 & i & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Задача 143. Существует ли целочисленная 3×3-матрица A, такая что
(а) $A^3 - 2I = 0$; (б) $A^2 + I = 0$?; (в) $A^4 + 4I = 0$; (г) $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I = 0$?

Задача 144. Оператор на $\mathbb{R}^3$ в некотором базисе задаётся матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Представьте этот оператор верхнетреугольной матрицей в подходящем базисе.

Задача 145. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$

Найдите все собственные векторы оператора T_a для каждого $a \in \mathbb{R}$.

Задача 146. Для комплексной 2×2-матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ определим оператор M_A на пространстве комплексных 2×2-матриц формулой

$$M_A : X \mapsto AX.$$

Найдите базис, в котором оператор M_A диагонализуется.

3.2. **Минимальный и характеристический многочлены.**

Задача 147. Выразите след и определитель квадратной матрицы через корни её характеристического многочлена.

Задача 148. Найдите формулу, выражающую коэффициенты характеристического многочлена $n \times n$-матрицы через коэффициенты самой матрицы для
(а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) произвольного n.

Задача 149. Докажите, что если A — нильпотентный оператор на конечномерном векторном пространстве, а I — тождественный, то $\det(I + A) = 1$.

Задача 150. Верно ли, что если оператор A на конечномерном векторном пространстве имеет два линейно независимых собственных вектора с собственным значением λ, то λ — кратный корень характеристического многочлена оператора A? Верно ли обратное?

Задача 151. Рассмотрим $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Определим оператор $M_a : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ умножения на $a \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ формулой:

$$M_a : x \mapsto ax.$$

Найдите характеристический многочлен оператора M_a для $a = 1 + \sqrt[3]{2}$.

Задача 152. Найдите минимальный и характеристический многочлены оператора в $\mathbb{R}^{10}$, который в некотором базисе записывается “таблицей умножения”, то есть, матрицей 10×10, у которой на (i, j)-том месте стоит ij.

Задача 153. Докажите, что в n-мерном комплексном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n - 1$.

Задача 154. Докажите, что в конечномерном вещественном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет либо собственный вектор, либо инвариантное подпространство размерности 2.

Задача 155. Характеристический многочлен некоторого оператора равен $(t-1)^2(t-2)^2$, а минимальный равен $(t-1)^2(t-2)$. Какой вид может иметь жорданова нормальная форма этого оператора?

Задача 156. Может ли вещественная 5×5 матрица A удовлетворять следующим уравнениям
(а) $(x^2 + 1)^m(x^2 - 1)^n = 0$; (б) $(x^2 + 1)^m(x^2 + 2)^n = 0$; (в) $(x^5 - 1)^m = 0$
для некоторых натуральных m и n? Если такая матрица существует, то чему может быть равен её минимальный многочлен?

Задача 157. Оператор T на $\mathbb{R}^4$ удовлетворяет уравнению $(T-I)(T^2+I)^2 = 0$ (через I обозначается тождественный оператор). Чему могут быть равны характеристический и минимальный многочлены этого оператора? (Нужно перечислить все возможные пары.)

Задача 158. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где
(а) $\chi = t^6 - 1$, $\mu = t^3 - 1$
(б) $\chi = (t - 1)^2(t - 2)^3$, $\mu = (t - 1)(t - 2)$
(в) $\chi = (t - 1)^5(t - 2)^5$, $\mu = (t - 1)^2(t - 2)^3$

Задача 159. ($\star$) Дана 3×3 матрица A, и известно что
$$\mathrm{tr}(A) = 6, \quad \mathrm{tr}(A^2) = 6, \quad \mathrm{tr}(A^3) = 6.$$
Найдите коэффициенты характеристического многочлена матрицы A.

3.3. **Приведение квадратичных форм к главным осям.**

Задача 160. (а) Докажите, что собственные значения вещественной симметрической матрицы размера 2×2 вещественны.

(б) Докажите, что собственные значения вещественной симметрической матрицы размера $n \times n$ вещественны.

Задача 161. Найдите оси симметрии коник на аффинной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, заданных уравнениями:
$$\text{(а) } x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2 = 1; \qquad \text{(б) } x_1^2 + ax_1x_2 = 1.$$
Через a обозначается вещественный параметр.

Задача 162. Существует ли на $\mathbb{R}^4$ квадратичная форма с главными угловыми минорами:

(а) $M_1 < 0$, $M_2 = 0$, $M_3 < 0$, $M_4 > 0$;
(б) $M_1 < 0$, $M_2 = 0$, $M_3 > 0$, $M_4 > 0$;
(в) $M_1 < 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = 0$, $M_4 > 0$?

Задача 163. Квадратичная форма q на $\mathbb{R}^4$ задана формулой:
$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} 4x_ix_j.$$

(а) Выпишите матрицу Грама формы q в стандартном базисе.
(б) Приведите форму q к главным осям.
(в) Найдите сигнатуру формы q.

Задача 164. Докажите, что квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$ положительно определена тогда и только тогда, когда все её главные угловые миноры положительны.

Задача 165. Квадратичная форма в некоем ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^n$ имеет матрицу с элементами a на диагонали и b вне неё. К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому ортонормированному базису?

4. Материал четвёртого модуля

Если не оговорено обратное, то во всех задачах ниже действие происходит на вещественной проективной плоскости.

4.1. **Проективные пространства и преобразования.**

Задача 166. На вещественной проективной плоскости заданы однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$.

(а) Сколько элементов в следующем множестве точек:
$$\{(1 : 2 : 2), (2 : 2 : 1), (2, 1, 2), (2 : 1 : 1), (1 : 1 : \frac{1}{2})\}?$$

(б) Для каждой пары различных точек из пункта (а) найдите уравнение проективной прямой, проходящей через эти точки.

(в) Нарисуйте точки из пункта (а) и прямые из пункта (б) в подходящей аффинной карте.

Задача 167. Докажите, что проективное преобразование прямой $\mathbb{FP}^1$ однозначно определяется образами трех произвольных точек.

Задача 168. Отождествим проективную прямую $\mathbb{FP}^1$ с множеством $\mathbb{F}\cup\{\infty\}$. Докажите, что преобразование множества $\mathbb{F}\cup\{\infty\}$ является проективным тогда и только тогда, когда оно является дробно-линейным, то есть имеет вид:

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},$$

где a, b, c, d — такие элементы поля $\mathbb{F}$, что $ad-bc\neq 0$.

Задача 169. (а) Напишите явную формулу для дробно-линейного преобразования проективной прямой $\mathbb{FP}^1$, переводящего три попарно различные точки a, b, $c\in\mathbb{F}$ в точки ∞, 0 и 1, соответственно.

(б) Куда при этом преобразовании перейдёт точка $d\in\mathbb{F}$?

Задача 170. (а) Докажите, что каждую тройку прямых в векторной плоскости $\mathbb{F}^2$ с координатами (x,y) можно перевести линейным преобразованием в тройку прямых $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ и $\{y=x\}$.

(б) Куда перейдёт прямая $\{y=dx\}$, где $d\in\mathbb{F}$, при преобразовании из пункта (а)?

Задача 171. Найдите прообраз точки $-\frac{35}{46}$ при дробно-линейном преобразовании рациональной проективной прямой, переводящем точки 2, $\frac{4}{3}$, 1, соответственно, в точки $-\frac{5}{6}$, $-\frac{11}{14}$, $-\frac{3}{4}$.

Задача 172. Докажите, что над полем $\mathbb{C}$ любое проективное преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Задача 173. (а) Докажите, что проективным преобразованием любую пару прямых на $\mathbb{FP}^2$ можно перевести в любую другую пару прямых.

(б) Найдите какое-нибудь проективное преобразование вещественной проективной плоскости, которое переводит прямые $\{x_1=0\}$ и $\{x_2=0\}$ в прямые $\{x_0+x_1+x_2=0\}$ и $\{x_1+x_2=0\}$, соответственно.

4.2. **Проективные коники и квадрики.**

Задача 174. (а) Докажите, что проективным преобразованием любую невырожденную проективную конику на $\mathbb{RP}^2$ можно перевести в конику, заданную уравнением $\{x_0^2+x_1^2-x_2^2=0\}$.

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для вырожденной коники.

(в) Найдите какое-нибудь проективное преобразование вещественной проективной плоскости, которое переводит конику $\{x_0^2+x_1^2+x_2^2-4(x_0x_1+x_1x_2+x_0x_2)=0\}$ в конику $\{x_0^2+x_1^2-x_2^2=0\}$.

Задача 175. Найдите проективное преобразование вещественной проективной плоскости, которое сохраняет конику $\{x_0^2+x_1^2-x_2^2=0\}$ и переводит точку $(1:1:3)$ в точку $(0:0:1)$.

Задача 176. (а) Докажите, что для любой невырожденой проективной коники $C\subset\mathbb{RP}^2$ и любой пары прямых $l_1,l_2\subset\mathbb{RP}^2$, не пересекающих C найдётся преобразование, которой переводит C в себя, а прямую l_1 переводит в прямую l_2.

(б) Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к пункту (а).

Задача 177. (а) Найдите все точки с целыми координатами на вещественной проективной конике, заданной уравнением $2x_0^2 + 3x_1^2 - 5x_2^2 = 0$.

(б) Найдите все точки с рациональными координатами на вещественной аффинной конике, заданной уравнением $2x^2 + 3y^2 - 5 = 0$.

(в) Найдите все решения в целых числах диофантова уравнениея

$$2x^2 + 3y^2 = 5z^2.$$

Задача 178. (а) Докажите, что невырожденная вещественная проективная квадрика в $\mathbb{RP}^3$ в подходящих однородных координатах задаётся одним из следующих уравнений:

$x_0x_1 - x_2x_3 = 0$ (квадрика типа I); $\quad x_0^2 + x_1^2 - x_2x_3 = 0$ (квадрика типа II).

(б) Нарисуйте аффинные квадрики в $\mathbb{R}^3$, которые получаются в пересечении аффинной карты $x_0 \neq 0$ с проективной квадрикой типа I и типа II.

(в) Какие ещё аффинные квадрики можно получить, пересекая квадрику типа I с разными аффинными картами? А квадрику типа II?

Задача 179. Покажите, что на квадрике $\{x_0x_1 - x_2x_3 = 0\} \subset \mathbb{RP}^3$ есть два бесконечных семейства проективных прямых со следующими свойствами: (1) каждые две прямые из одного и того же семейства не пересекаются; (2) каждые две прямые из разных семейств пересекаются; (3) через каждую точку квадрики проходит ровно одна прямая из каждого семейства.

Задача 180. ($\star$) Сколько прямых пересекают четыре данные попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{RP}^3$? Перечислите все возможные ответы.

4.3. **Классические результаты проективной геометрии.**

Задача 181 (Теорема Дезарга)**.** Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 на плоскости пересекаются в одной точке O, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой. (Иными словами, если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ есть центр перспективы, то у них есть и ось перспективы.)

Задача 182 (Теорема Паппа)**.** Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Тогда точки пересечения прямых AB' и $B'A$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой.

Задача 183 (Теорема Паскаля)**.** Шестиугольник $ABCDEF$ на проективной плоскости вписан в конику. Докажите, что точки пересечения сторон AB и DE, сторон BC и EF и сторон CD и FA лежат на одной прямой.

Задача 184 (Теорема Брианшона)**.** Сформулируйте и докажите утверждение, двойственное к теореме Паскаля.

Задача 185. Даны две различные прямые l и l' на проективной плоскости. Известно, что проективное преобразование T переводит точки a, b, $c \in l$ в точки a', b', $c' \in l'$. Постройте одной линейкой образ точки $d \in l$ при преобразовании T.

Задача 186. Докажите, что центр данной окружности на евклидовой плоскости нельзя построить с помощью одной только линейки.

Задача 187. Докажите неравенство треугольника для расстояния в модели гиперболической геометрии Клейна в круге.

Задача 188. Определите градусную меру угла в модели Клейна в круге. Докажите, что эта мера совпадает с евклидовой только в случае, когда вершина угла находится в центре круга.

Задача 189. С помощью одной линейки в модели Клейна

(а) опустите перпендикуляр из данной точки на данную прямую;

(б) постройте биссектрису данного угла;

(в) поделите данный отрезок пополам.

Задача 190. Покажите, что биссектрисы треугольника в модели Клейна пересекаются в одной точке. Выведите из этого факта теорему Брианшона.

Задача 191. Верно ли, что срединные перпендикуляры к сторонам треугольника в модели Клейна всегда пересекаются в одной точке?

4.4. **Классические результаты геометрии Лобачевского.**

Задача 192 (Формула Лобачевского)**.** Точка A на гиперболической плоскости находится на расстоянии d от прямой l. Найдите *угол параллельности* $\Pi(d)$ (то есть угол между перпендикуляром, опущенным из A на l и одним из предельных лучей из A к l) как функцию от d.

Задача 193. Докажите, что у любой пары прямых на плоскости Лобачевского (=гиперболической плоскости) есть общая ось симметрии.

Задача 194. Докажите, что для каждой пары различных прямых l_1 и l_2 на гиперболической плоскости верно ровно одно утверждение из списка:

(1) l_1 и l_2 пересекаются;

(2) у l_1 и l_2 есть общий перпендикуляр;

(3) l_1 и l_2 не пересекаются, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся точка на l_1 и точка на l_2 на расстоянии меньше ε друг от друга.

Задача 195. Треугольники ABC и ABD на гиперболической плоскости имеют общую сторону AB, и лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что они имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда прямая, соединяющая середины сторон AC и BC, совпадает с прямой, соединяющей середины сторон AD и BD.

Задача 196 (Теорема Лежандра)**.** Докажите, что сумма углов треугольника на гиперболической плоскости меньше, чем π.

Задача 197 (Признак равенства треугольников по трём углам)**.** (а) Докажите или опровергните следующее утверждение. Если три угла одного треугольника на гиперболической плоскости равны трём углам другого треугольника, то треугольники конгруэнтны.

(б) Придумайте универсальную меру длины на плоскости Лобачевского (не привязанную к результатам физических измерений).

Задача 198 (Константа Швейкарта)**.** (а) Докажите, что на стороне любого острого угла на гиперболической плоскости можно выбрать точку так, чтобы восставленный в ней перпендикуляр был параллелен другой стороне угла.

(б) Докажите, что найдутся такие три точки, что они не лежат ни на одной прямой и ни на одной окружности.

Задача 199 (Аксиома Гаусса)**.** Докажите, что площадь любого треугольника на гиперболической плоскости ограничена сверху некоторой универсальной мировой константой.

Задача 200 (Аксиома Льюиса Кэролла)**.** Докажите, что на гиперболической плоскости найдётся такой правильный четырёхугольник, что его площадь в 1024 раза меньше, чем площадь круга, ограниченного описанной окружностью четырёхугольника.