Проективная геометрия, 4-й модуль 2020 г.

Семинар 10. Абсолютная геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

В решениях задач 1-3 нужно использовать все аксиомы обычной евклидовой плоскости кроме аксиомы о параллельных. В остальных задачах нужно дополнительно использовать аксиому Лобачевского:

(L) Для любой прямой l и любой точки A, не лежащей на этой прямой, существуют такие два *предельных* луча AB и AC, не лежащие на одной прямой, и не пересекающие l, что любой луч AE внутри угла BAC пересекает l.

Задача 1. Треугольники ABC и ABD имеют общую сторону AB, и лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что они имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда прямая, соединяющая середины сторон AC и BC, совпадает с прямой, соединяющей середины сторон AD и BD.

Задача 2 (Теорема Лежандра)**.** Докажите, что сумма углов треугольника не может быть больше, чем π. Указание: Пусть $A_1A_2C_1$ — треугольник. Постройте ещё n конгруэнтных ему треугольников $A_2A_3C_2, \ldots, A_{n+1}A_{n+2}C_{n+1}$, так чтобы точки A_1, $A_2, \ldots, A_{n+2}$ лежали на одной прямой друг за другом, а вершины $C_1, \ldots, C_{n+1}$ находились по одну сторону от прямой A_1A_2. Теперь доказывайте от противного. Сравнивайте длину отрезка A_1A_{n+2} и ломаной $A_1C_1C_2 \ldots C_{n+1}A_{n+1}$, используя что против большего угла в треугольнике лежит большая сторона. Не забудьте об аксиоме Архимеда - здесь без неё никак.

Задача 3. (а) Докажите, что если сумма углов одного треугольника на плоскости равна π, то и сумма углов любого другого треугольника равна π.

(б) Докажите, что если сумма углов одного треугольника на плоскости строго меньше чем π, то и сумма углов любого другого треугольника строго меньше чем π. Указание: Используйте аддитивность дефекта треугольника и теорему Лежандра.

Задача 4. Докажите, что на плоскости Лобачевского сумма углов треугольника не может быть равна π (тем самым из теоремы Лежандра следует, что она строго меньше чем π). Указание: Пусть A_1A_2C — треугольник с суммой углов π. Обозначим через α его угол при вершине A_2. Из вершины C проводите лучи CA_3, $CA_4, \ldots$, так чтобы угол A_2CA_3 был равен $\frac{\alpha}{2}$, угол A_3CA_4 равен $\frac{\alpha}{4}$ и т.д. (каждый следующий в два раза меньше предыдущего). Используйте задачу 2, чтобы придти к противоречию с аксиомой Лобачевского.

Задача 5 (Признак равенства треугольников по трём углам)**.** (а) Докажите или опровергните следующее утверждение. Если три угла одного треугольника на гиперболической плоскости равны трём углам другого треугольника, то треугольники конгруэнтны.

(б) Придумайте универсальную меру длины на плоскости Лобачевского (не привязанную к результатам физических измерений).

Задача 6 (Константа Швейкарта)**.** (а) Докажите, что на стороне любого острого угла можно выбрать точку так, чтобы восставленный в ней перпендикуляр был параллелен другой стороне угла.

(б) Докажите, что найдутся такие три точки, что они не лежат ни на одной прямой и ни на одной окружности.

Задача 7 (Аксиома Гаусса)**.** Докажите, что площадь любого треугольника на гиперболической плоскости ограничена сверху некоторой универсальной мировой константой.