

Семинар 6. Квадрики

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Докажите, что невырожденная вещественная проективная quadрика в \mathbb{RP}^3 в подходящих однородных координатах задаётся одним из следующих уравнений:

$$x_0x_1 - x_2x_3 = 0 \text{ (quadрика типа I); } \quad x_0^2 + x_1^2 - x_2x_3 = 0 \text{ (quadрика типа II).}$$

Задача 2. Нарисуйте (или найдите подходящие картинки в Интернете) аффинные quadрики в \mathbb{R}^3 , которые получаются в пересечении аффинной карты $x_0 \neq 0$ с проективной quadрикой

(а) типа I; (б) типа II.

Определение. Гиперboloид в трёхмерном евклидовом пространстве — это поверхность вращения, заметаемая гиперболой при вращении относительно одной из её осей симметрии. Гиперboloид называется однополостным, если состоит из одной компоненты связности, и двуполостным иначе.

Задача 3. Можно ли получить однополостный гиперboloид как пересечение какой-нибудь аффинной карты в \mathbb{RP}^3 с проективной quadрикой

(а) типа I; (б) типа II?

Задача 4. Можно ли получить двуполостный гиперboloид как пересечение какой-нибудь аффинной карты в \mathbb{RP}^3 с проективной quadрикой

(а) типа I; (б) типа II?

Задача 5. Сколько прямых лежит на проективной quadрике

(а) типа I; (б) типа II?

Задача 6. Пусть $H = \{(x, y, z) \mid y(x + z - 1) - xz = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ — однополостный гиперboloид.

(а) Найдите на H три попарно скрещивающихся прямых.

(б) Докажите, что если прямая пересекает все три прямые из пункта (а), то она лежит на гиперboloиде H .

Задача 7 (*). Сколько прямых пересекают четыре данные прямые в трёхмерном пространстве?

