Проективная геометрия, 4-й модуль 2020 г.

Семинар 7. Преобразования Мёбиуса

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение. Группа Мёбиуса состоит из всех дробно-линейных преобразований комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. Расширенная группа Мёбиуса содержит также комплексное сопряжение, то есть состоит из преобразований:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}; \quad z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \text{ где } a,b,c,d \in \mathbb{C};\ ab-cd \neq 0.$$

Задача 1. Отождествим поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$, сопоставив числу $z = x + yi$ точку с координатами (x, y). Опишите геометрически (поворот, отражение, инверсия,…) расширенное преобразование Мёбиуса:

(а) $z \mapsto iz$; (б) $z \mapsto 2z$; (в) $z \mapsto \bar{z}$; (г) $z \mapsto z + 2i$; (д) $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$.

Задача 2. Нарисуйте образы горизонтальных и вертикальных прямых ($\operatorname{Im} z = 0, \pm1, \pm2, \dots$ и $\operatorname{Re} z = 0, \pm1, \pm2, \dots$) при отображении $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Также нарисуйте образ полосы $1 \le \operatorname{Re} z \le 2$ и квадрата $1 \le \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \le 2$.

Задача 3. Покажите, что группа Мёбиуса порождается преобразованиями:

$$z \mapsto z + b; \quad z \mapsto az; \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Задача 4. (а) Покажите, что каждое расширенное преобразование Мёбиуса можно представить в виде композиции нескольких отражений относительно прямых и инверсий относительно окружностей.

(б) Покажите, что “несколько” в пункте (а) не больше трёх.

Задача 5. Покажите, что расширенное преобразование Мёбиуса

(а) переводит евклидовы прямые и окружности в прямые и/или окружности.

(б) сохраняет углы (то есть *конформно*).

Задача 6. Покажите, что точки z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbb{C}$ лежат на одной евклидовой окружности или прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно (то есть лежит в $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{CP}^1$).

Задача 7. Найдите преобразование Мёбиуса, которое переводит верхнюю полуплоскость $H = \{z \mid \operatorname{Im} z \ge 0\}$ в единичный диск $D = \{|z| \le 1\}$.