Проективная геометрия, 4-й модуль 2020 г.

Семинар 9. Сюрпризы геометрии Лобачевского

факультет математики, НИУ ВШЭ

Во всех задачах дело происходит на плоскости Лобачевского (также известной как гиперболическая плоскость). Можно использовать модель Клейна или Пуанкаре, а можно аксиомы обычной евклидовой плоскости, заменив аксиому о параллельных на аксиому Лобачевского:

(L) Для любой прямой l и любой точки A, не лежащей на этой прямой, существуют такие два *предельных* луча AB и AC, не лежащие на одной прямой, и не пересекающие l, что любой луч AE внутри угла BAC пересекает l.

Задача 1 (Дефект)**.** Определим *дефект* $\delta(\Delta)$ треугольника Δ с углами α, β и γ как $\pi-\alpha-\beta-\gamma$. Докажите, что дефект аддитивен, то есть если треугольник Δ разбить на два треугольника Δ_1 и Δ_2, то выполнено тождество:

$$\delta(\Delta)=\delta(\Delta_1)+\delta(\Delta_2).$$

Задача 2. Докажите, что у любой пары прямых на плоскости Лобачевского есть ось симметрии.

Задача 3. Докажите, что для каждой пары различных прямых l_1 и l_2 на гиперболической плоскости верно ровно одно утверждение из списка:

- l_1 и l_2 пересекаются;
- у l_1 и l_2 есть общий перпендикуляр;
- l_1 и l_2 не пересекаются, и для каждого $\varepsilon>0$ найдутся точка на l_1 и точка на l_2 на расстоянии меньше ε друг от друга.

Задача 4 (Формула Лобачевского)**.** Точка A находится на расстоянии d от прямой l. Найдите *угол параллельности* $\Pi(d)$ (то есть угол между перпендикуляром, опущенным из A на l и одним из предельных лучей из A к l) как функцию от d.

Задача 5. В модели Клейна гиперболической плоскости поделите данный отрезок пополам одной линейкой.