Тривиум, весенний семестр 2020 г.

Часть III. Анализ и начала топологии.

факультет математики, НИУ ВШЭ

1. Вещественные числа

Задача 1. Переведите обыкновенную дробь в десятичную, а десятичную дробь — в обыкновенную:

$$\text{(а) } \frac{5}{7}; \quad \text{(б) } 1,3(12); \quad \text{(в) } 5,7(037); \quad \text{(г) } \frac{3}{13}.$$

Задача 2. (а) Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$ и первым членом 1.

(б) Найдите сумму ряда

$$2 + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{2^4}{3^3} + \dots .$$

Задача 3. Проверьте, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и если сходится, то вычислите его сумму.

$$\text{(а) } a_n = \frac{1}{n}; \quad \text{(б) } a_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad \text{(в) } a_n = \frac{1}{n!}; \quad \text{(г) } a_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$\text{(д) } a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}; \quad \text{(е) } a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}; \quad \text{(ж) } a_n = \frac{2^n}{(2n)!}.$$

2. Топология вещественной прямой

Во всех задачах этого раздела используется стандартная топология на вещественной прямой.

Задача 4. Какие из следующих подмножеств вещественной прямой являются (а) открытыми; (б) замкнутыми; (в) открытыми и замкнутыми; (г) не открытыми и не замкнутыми; (д) связными?

(1) $\mathbb{R}$.
(2) $\mathbb{Q}$.
(3) $\mathbb{Z}$.
(4) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$.
(5) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$.
(6) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 2\}$.
(7) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$.
(8) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}$.
(9) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$.

Задача 5. Найдите замыкание множества $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

Задача 6. Найдите все предельные точки множества

$$\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \left\{\frac{2n}{n^2+2n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Задача 7. Какие из следующих подмножеств вещественной прямой компактны?

$$\text{(а) } [0,1], \quad \text{(б) } (0,1], \quad \text{(в) } [0,1), \quad \text{(г) } \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right], \quad \text{(д) } \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1},\frac{n+1}{n}\right].$$

3. Длины, площади и объёмы

Задача 8 (О шаре и цилиндре)**.** Из чугунных цилиндрических стержней длиной 1 м с радиусом основания 5 см выплавляют пушечные ядра радиусом 5 см. Сколько понадобится цилиндров, чтобы выплавить 30 ядер?

Задача 9. *Кольцо для салфеток* $R(a,b)$ с радиусами a и b состоит из всех точек шара радиуса a, которые находятся на расстоянии не меньше, чем b от оси, проходящей через центр шара. Какое из колец для салфеток, $R(13,5)$ или $R(15,9)$, имеет больший объём?

Задача 10. Найдите первообразные рациональных функций:

$$\text{(а) } \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad \text{(б) } \frac{2x^3+x}{x^3+x}; \quad \text{(в) } \frac{2x^2-x-7}{x^3-5x^2+6x}; \quad \text{(г) } \frac{x^n+1}{(x+1)^n}.$$

Задача 11. Найдите первообразные функций:

$$\text{(а) } xe^x; \quad \text{(б) } x^2e^x; \quad \text{(в) } x^2\ln x; \quad \text{(г) } x^ne^x.$$

Задача 12. (а) На евклидовой координатной плоскости дана единичная окружность с центром в нуле. Найдите длину меньшей из двух дуг окружности, заключённых между точками $(1,0)$ и $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.

(б) Парабола на евклидовой координатной плоскости задана уравнением $y=x^2$. Найдите длину дуги параболы между точками $(0,1)$ и $(2,4)$.

Задача 13. Найдите определённые интегралы

$$\text{(а) } \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx; \quad \text{(б) } \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx.$$

4. Функции одной переменной

Задача 14. Вспомните, как определяется функция $f(x)=x^x$ при $x>0$ и найдите её производную в точке 2.

Задача 15. Найдите все локальные экстремумы функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\text{(а) } f(x)=x^3+x; \quad \text{(б) } f(x)=x^3-x; \quad \text{(в) } f(x)=x^3-1.$$

Задача 16. Какие из функций в предыдущей задаче монотонны на отрезке $[-1,1]$?

Задача 17. Найдите максимальное и минимальное значения функции

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; \quad f(x)=x^4-x^2+1$$

на отрезке $[-\frac{1}{2},2]$.

Задача 18. (а) Найдите все точки перегиба функции из предыдущей задачи.

(б) Является ли эта функция выпуклой на отрезке $[1,2]$?

Задача 19. Сколько вещественных корней имеет многочлен

$$\text{(а) } x^3-x+2; \quad \text{(б) } x^3-x-\frac{1}{2}?$$

Задача 20. Сколько решений уравнение $x=\cos x$ имеет на отрезке $[0,\pi]$?

5. Функции нескольких переменных

Задача 21. Даны дифференцируемые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ от одной вещественной переменной. Найдите производную функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке 2, где

$$f(x) = \varphi(x)^2 + \psi(x)^3,$$

если известно, что

$$\varphi(2) = 3, \quad \varphi'(2) = 5; \quad \psi(2) = 2, \quad \psi'(2) = 7.$$

Задача 22. Дана дифференцируемая функция $F(x, y)$ от двух вещественных переменных. Найдите производную функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке 2, где

$$f(t) = F(t^2, t^3),$$

если известно, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = y.$$

Задача 23. Дана дифференцируемая функция $F(x, y)$ от двух вещественных переменных. Определим отображение $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$T : (x, y) \mapsto (F(x, y)^2, F(x, y)^3)$$

(а) Чему равен якобиан отображения T?
(б) Найдите дифференциал отображения T в точке $(1, 2)$, если известно что

$$F(1, 2) = 3, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1, 2) = 5; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) = 2.$$

Задача 24. Две прямые на евклидовой координатной плоскости заданы уравнениями $x = 1$ и $y = 1$. Найдите угол между образами этих прямых при отображении

$$I : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \quad I : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

в точке $I(1, 1)$.

Задача 25. Множество C на вещественной координатной плоскости состоит из всех точек (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$(x - 3y - 2)(x - y^3) = 0.$$

У каких точек $(x_0, y_0) \in C$ нельзя найти такой открытой окрестности $U \subset \mathbb{R}^2$, что $C \cap U$ совпадает с графиком какой-нибудь функции $y = f(x)$?