

Экзамен

Геометрия, весенний семестр 2020 г.
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Итог
Оценка									

Продолжительность экзамена — 3 часа. На полный балл достаточно решить любые 6 задач. Нельзя пользоваться никакими интерактивными онлайн ресурсами.

Задача 1. Рассмотрим поле \mathbb{R} как векторное пространство над \mathbb{Q} . Являются ли линейно независимыми векторы

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3} ?$$

Задача 2. Найдите косинус угла между гиперплоскостью Π и вектором v в евклидовом аффинном пространстве \mathbb{R}^4 , если

$$\begin{aligned} \Pi &= \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\}; \\ v &= (1, -2, 5, 8). \end{aligned}$$

Задача 3. Вычислите A^{2020} , где

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найдите минимальный и характеристический многочлены матрицы размера $n \times n$, все коэффициенты которой равны 2.

Задача 5. Найдите прообраз точки -1 при дробно-линейном преобразовании рациональной проективной прямой, переводящем точки $2, \frac{4}{3}, 1$, соответственно, в точки $-\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$.

Задача 6. Найдите сигнатуру квадратичной формы q на \mathbb{R}^4 , заданной формулой:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = - \sum_{i=1}^4 x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} 4x_i x_j.$$

Задача 7. Найдите проективное преобразование вещественной проективной плоскости, которое сохраняет конику $\{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ и переводит точку $(1 : 1 : 2\sqrt{2})$ в точку $(0 : 0 : 1)$.

Задача 8. Приведите пример такого треугольника в модели Клейна, что срединные перпендикуляры к его сторонам НЕ пересекаются в одной точке.