

## Контрольная 1 июня: вариант 1

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	Итого
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

**Задача 1.** Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

**Задача 2.** Определите, компактно ли подмножество  $X$  вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{2n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Задача 3.** Кольцо для салфеток  $R(5, 4)$  состоит из всех точек шара  $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2\}$  в трёхмерном евклидовом пространстве, которые находятся на расстоянии не меньше, чем 4 от оси  $z$ . Найдите объём кольца для салфеток  $R(5, 4)$ .

(Вы можете использовать любое известное Вам определение объёма или считать, что объём — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt,$$

где функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  сопоставляет числу  $t$  площадь сечения  $R(5, 4) \cap \{z = t\}$ , а пределы интегрирования  $t_1$  и  $t_2$  равны, соответственно, минимальному и максимальному значению  $z$ -координаты на множестве  $R(5, 4)$ .)

**Задача 4.** Найдите первообразную функции:

$$x^n e^{-x}$$

для всех натуральных  $n$ .

**Задача 5.** Найдите максимальное и минимальное значения функции

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

на отрезке  $[-\frac{1}{2}, 2]$ .

**Задача 6.** Дана дифференцируемая функция  $F(x, y)$  от двух вещественных переменных. Найдите производную функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точке 2, где

$$f(t) = F(t^2, e^t),$$

если известно, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y^2.$$