

**Контрольная 1 июня: вариант 2**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Фамилия и имя студента:**

Задача	1	2	3	4	5	6	Итого
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

**Задача 1.** Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

**Задача 2.** Определите, компактно ли подмножество  $X$  вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{2n}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Задача 3.** Кривая на евклидовой координатной плоскости задана уравнением  $(3y)^2 = (2x)^3$ . Найдите длину дуги этой кривой между точками  $(0, 0)$  и  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ .

(Вы можете использовать любое известное Вам определение длины или считать, что длина — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt,$$

где функция  $f : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$  дифференцируема и задаёт взаимно-однозначное отображение между отрезком  $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  и дугой, длину которой требуется найти.)

**Задача 4.** Найдите первообразную рациональной функции:

$$\frac{x^n + 1}{x + 1}.$$

**Задача 5.** Сколько решений уравнение  $x = \cos 3x$  имеет на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ?

**Задача 6.** Множество  $C$  на вещественной координатной плоскости состоит из всех точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$(x^2 - y - 1)(x - y^3) = 0.$$

У каких точек  $(x_0, y_0) \in C$  нельзя найти такой открытой окрестности  $U \subset \mathbb{R}^2$ , что  $C \cap U$  совпадает с графиком какой-нибудь функции  $y = f(x)$ ?