

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	Итог
Оценка							

Продолжительность контрольной 80 минут. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться только ручкой и бумагой.

**Задача 1.** Проверьте, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!},$$

и если сходится, то вычислите его сумму.

**Задача 2.** Определите, компактно ли подмножество  $X$  вещественной прямой в стандартной топологии:

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2n + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Задача 3.** Парабола на евклидовой координатной плоскости задана уравнением  $y = x^2$ . Найдите длину дуги параболы между точками  $(-1, 1)$  и  $(2, 4)$ .

(Вы можете использовать любое известное Вам определение длины или считать, что длина — это интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt,$$

где функция  $f : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$  дифференцируема и задаёт взаимно-однозначное отображение между отрезком  $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  и дугой, длину которой требуется найти.)

**Задача 4.** Найдите первообразную функции:

$$\frac{x^n + 1}{(x - 1)^n}$$

для всех натуральных  $n$ .

**Задача 5.** Найдите отрезок максимальной длины, на котором функция

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$$

является выпуклой (вверх).

**Задача 6.** Две прямые на евклидовой координатной плоскости заданы уравнениями  $x + y = 1$  и  $y = 1$ . Найдите угол между образами этих прямых при отображении

$$I : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \quad I : (x, y) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

в точке  $I(0, 1)$ .