

Домашнее задание 2. Срок сдачи 28 сентября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

**Задача 1.** Найдите линейную зависимость между векторами  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 6)$ ,  $(3, 6, 11)$  и  $(2, 5, 8)$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**Задача 2.** Пусть  $V$  — вещественное векторное пространство квадратных трёхчленов. Определим оператор  $T : V \rightarrow V$  формулой:

$$[T(f)](x) = f(x + 2).$$

Проверьте, что  $T$  является линейным оператором и выпишите его матрицу в следующих базисах:

(а)  $(1, x, x^2)$ ;    (б)  $((x - 2)(x - 3), (x - 1)(x - 3), (x - 1)(x - 2))$ .

**Задача 3.** Докажите, что если два вектора линейно зависимы, то один из них равен другому, умноженному на скаляр.

**Задача 4.** В вещественном векторном пространстве  $\mathbb{R}[x]$  представьте вектор  $x^4 - 4x^3 + 3$  как линейную комбинацию векторов  $(x - 1)$ ,  $(x - 1)^2$ ,  $(x - 1)^4$ .

**Задача 5.** (а) Представьте вектор  $x^3 + 3$  в  $\mathbb{R}[x]$  в виде линейной комбинации векторов  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ,  $(x - 2)(x - 3)$ ,  $(x - 1)(x - 3)$ ,  $(x - 1)(x - 3)$ .

(б) Найдите такие вещественные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , что справедливо тождество

$$\frac{x^3 + 3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2} + \frac{d}{x - 3}.$$