

Домашнее задание 3. Срок сдачи 5 октября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Пусть (a, b, c) — произвольная пифагорова тройка (то есть тройка натуральных чисел, таких что $a^2 + b^2 = c^2$).

(а) Проверьте, что тройка

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

тоже пифагорова.

(б) Проверьте, что утверждение пункта (а) останется верным, если заменить матрицу A на одну из матриц:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad C := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. (а) Найдите матрицу композиции отражений $T_2 \circ T_1$, где T_1 — отражение координатной плоскости относительно оси x , а T_2 — отражение относительно прямой $ny = mx$, где m и n целые числа.

(б) Покажите, что преобразования $T_2 \circ T_1$ является поворотом. На какой угол?

Задача 3. Найдите такую матрицу A , что

(а)

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

для любого набора скаляров (x_1, \dots, x_n) .

(б)

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$$

для любого набора скаляров (x_1, \dots, x_{2n}) .

Задача 4. Линейный оператор $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ в стандартном базисе задаётся матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу оператора T^{2020} (для этого вовсе не обязательно перемножать матрицы).

Задача 5. Рассмотрим множество \mathfrak{H} всех вещественных матриц 4×4 вида

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

(а) Проверьте, что сумма, разность и произведение двух матриц из \mathfrak{H} тоже лежит в \mathfrak{H} .

(б) Найдите все такие матрицы $X \in \mathfrak{H}$, что $X^2 = -I$ и выпишите таблицу умножения для найденных матриц. Через I обозначается единичная 4×4 матрица.