

Семинары 1-2. Школьная плоскость и трёхмерное пространство

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

В задачах используется известное со школы понятие координат на плоскости и в пространстве. Под вектором подразумевается направленный отрезок (= стрелка), соединяющий две точки плоскости. Складывать векторы нужно так же, как учат на уроках физики.

Задача 1. Из центра правильного шестиугольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих шести, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

Задача 2. На плоскости даны векторы \vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OX} . Известно, что $\vec{AX} = 4\vec{XB}$. Найдите такие вещественные числа λ и μ , что выполнено равенство векторов:

$$\vec{OX} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}.$$

Задача 3. На плоскости нарисованы (но не подписаны) векторы u , v , $u+2v$, $\frac{1}{2}(u+v)$, $u-v$ и $2u+v$. Чтобы воспроизвести рисунок, нарисуйте векторы с координатами $(-1, 1)$, $(-1, 5)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 7)$, $(2, 2)$. Найдите координаты векторов u и v .

Задача 4. Никон выбрал два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 на плоскости и так сопоставил каждому вектору v пару Н-координат (x_1, x_2) , чтобы выполнялось тождество:

$$v = x_1e_1 + x_2e_2.$$

Родион выбрал два других неколлинеарных вектора f_1 и f_2 и так сопоставил вектору v пару Р-координат (y_1, y_2) , что

$$v = y_1f_1 + y_2f_2.$$

Известно, что векторы с Н-координатами $(1, 2)$ и $(3, 4)$ имеют Р-координаты $(1, 4)$ и $(2, 3)$, соответственно. Найдите Р-координаты вектора, имеющего Н-координаты $(5, 8)$.

Для запоминания. ЛИНЕЙНОМУ ОТОБРАЖЕНИЮ

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

ПЛОСКОСТИ В СЕБЯ СООТВЕТСТВУЕТ МАТРИЦА

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Найдите матрицы следующих линейных отображений на плоскости с координатами x и y :

- (а) отражение относительно прямой $\{x = y\}$,
- (б) поворот на $\frac{\pi}{4}$ относительно начала координат,
- (в) гомотетия с коэффициентом 10 относительно начала координат,
- (г) проекция на ось x вдоль оси y .

Задача 6. Пусть S — отражение относительно прямой $\{y = 0\}$, а T — поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат.

(а) Покажите, что композиция $S \circ T$ отображений S и T является отражением относительно некоторой прямой, и найдите эту прямую.

(б) Найдите матрицы отображений S , T и $S \circ T$.

Задача 7. Через A_S и A_T , соответственно, обозначены матрицы линейных отображений S и T плоскости в себя. Проверьте, что произведение матриц соответствует композиции отображений, то есть матрица отображения $S \circ T$ совпадает с матрицей ST .

Задача 8. На плоскости с координатами (x, y) выпишите матрицу поворота против часовой стрелки на угол φ относительно начала координат.

Задача 9. На плоскости дан равносторонний треугольник ABC с центром в начале координат.

(а) Опишите геометрически (как повороты, отражения, и т.п.) все движения плоскости, которые переводят треугольник ABC в себя.

(б) Пусть S — отражение относительно оси симметрии треугольника, проходящей через вершину A , а T — поворот против часовой стрелки относительно центра треугольника на угол $\frac{2\pi}{3}$. Опишите геометрически движения ST , T^2 и STS .

(в) Представьте каждое движение из пункта (а) в виде композиции движений S и T .

(г) Найдите матрицы движений из пункта (а) в какой-нибудь системе координат.

(д) Можно ли в пункте (г) выбрать систему координат так, чтобы все матрицы имели целые коэффициенты?

Задача 10. Лебедь, рак и щука тянут воз вдоль векторов $(1, -1, 2)$, $(-2, 1, -1)$ и $(1, 1, -4)$, соответственно. Чему должны быть равны приложенные силы по абсолютной величине, чтобы воз был и ныне там?

Задача 11. $ABCDEFGH$ — куб в пространстве. Вершины куба обозначены таким образом, что $ABCD$ и $EFGH$ — грани куба, а AE — ребро куба. Выразите векторы \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{AE} и \vec{AG} через векторы $u = \vec{AC}$, $v = \vec{AF}$ и $w = \vec{AH}$.

Задача 12. В трёхмерном пространстве с координатами (x, y, z) найдите матрицу поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x = y = z\}$.