Геометрия, 1-й модуль 2020 г.

Семинары 3-4. Векторные пространства

факультет математики, НИУ ВШЭ

В задачах используется аксиоматическое определение вещественного векторного пространства. Краткая версия определения приводится ниже, полную версию можно найти в любом учебнике по линейной алгебре.

Для запоминания. В вещественном векторном пространстве

(1) векторы образуют абелеву группу по сложению;
(2) умножение вектора на скаляр ассоциативно: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;
(3) умножение вектора на вещественное число 1 — это тождественное преобразование: $1v = v$;
(4) умножение вектора на скаляр дистрибутивно и относительно сложения скаляров, и относительно сложения векторов:

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v; \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

Задача 1. Студент Вася на лекции переписал с доски две теоремы о вещественных векторных пространствах:

(1) $0v = 0$;
(2) $\lambda 0 = 0$.

Чтобы различить $0_{\mathbb{R}}$ (вещественное число 0) и 0_V (нулевой вектор), лектор использовала цветные мелки, но при переписывании цвета не сохранились.

(а) Помогите Васе восстановить строгие формулировки обеих теорем.
(б) Докажите сформулированные вами в пункте (а) теоремы.

Задача 2. Пусть V — множество всех квадратных трёхчленов, то есть таких функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x) = ax^2 + bx + c$ (коэффициенты a, b и c — вещественные константы). Зададим на V структуру вещественного векторного пространства:

- $(u + v)(x) := u(x) + v(x)$ (сложение векторов);
- $(\lambda u)(x) := \lambda u(x)$ (умножение вектора на скаляр).

(а) Проверьте, что V удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства.
(б) Найдите такой квадратный трёхчлен f, что

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 20, \quad f(3) = 200.$$

Задача 3. Пусть $V = \mathbb{R}^+$ — множество всех строго положительных вещественных чисел. Попробуем задать на V структуру вещественного векторного пространства:

- $u \boxplus v := uv$ (сложение векторов);
- $\lambda \odot u := u^\lambda$ (умножение вектора на скаляр).

(а) Вычислите $(\lambda \odot u) \boxplus (\mu \odot v) \boxplus (\nu \odot w)$ для $\lambda = \mu = -1$, $\nu = 2$, $u = 2$, $v = w = 3$.
(б) Все ли аксиомы векторного пространства выполняются в V?
(в) Придумайте линейное отображение $T : V \to \mathbb{R}$, которое является биекцией.

Задача 4. Докажите, что в каждом вещественном векторном пространстве V для всех векторов $v \in V$ выполнено тождество:

$$(-1)v = -v.$$

(Если вам кажется, что тут нечего доказывать, то запишите формулировку теоремы в частном случае: для векторного пространства из предыдущей задачи. Какую формулу из школьной алгебры вы получили, и в каком классе эту формулу проходят?)

Задача 5. Пусть V — множество всех последовательностей вещественных чисел.

(а) Задайте на V структуру вещественного векторного пространства.

(б) Приведите пример линейного отображения $T : V \to V$, которое является инъекцией, но не является сюръекцией.

(в) Приведите пример сюръективного, но не инъективного линейного отображения $T : V \to V$.

Задача 6. Пусть X — произвольное множество. Обозначим через V множество всех отображений $f : X \to \mathbb{R}$.

(а) Задайте на V структуру вещественного векторного пространства.

(б) Покажите, что в случае, когда X конечно, векторное пространство V можно отождествить с $\mathbb{R}^n$ для некоторого натурального числа n. Как связаны n и X?

(в) Покажите, что в случае, когда X счётно, векторное пространство V можно отождествить с пространством всех вещественных последовательностей из предыдущей задачи.

Задача 7. Пусть V — множество единичных векторов на плоскости. Определим сложение векторов в V следующим образом. Если векторы u и $v \in V$ образуют углы φ и ψ, соответственно, с осью x, то их сумма $u \boxplus v$ — это единичный вектор, образующий угол $\varphi + \psi$ с осью x.

(а) Проверьте, что векторы образуют абелеву группу относительно операции $\boxplus$.

(б) Можно ли дополнить операцию $\boxplus$ сложения векторов на V какой-нибудь операцией $\odot$ умножения на скаляр так, чтобы V стало вещественным векторным пространством?

Задача 8. Пусть V — множество единичных векторов на плоскости. Можно ли ввести на V структуру вещественного векторного пространства?

Задача 9. Пусть U и V — векторные пространства, а $T : U \to V$ — линейное отображение. Докажите, что $T(0) = 0$.

Задача 10. Пусть V — векторное пространство квадратных трёхчленов из задачи 2. Какие из следующих отображений $T : V \to V$ являются линейными?

$$\text{(а) } [T(f)](x) = f(x) + 2; \quad \text{(б) } [T(f)](x) = f(x + 2); \quad \text{(в) } [T(f)](x) = f(x) + x;$$
$$\text{(г) } [T(f)](x) = f(2x); \quad \text{(д) } [T(f)](x) = f(2x + 1).$$