Геометрия, 1-й модуль 2020 г.

Семинары 5-6. Линейные отображения

факультет математики, НИУ ВШЭ

В задачах используется определение линейного отображения между векторными пространствами.

Для запоминания. Отображение $T : V \to W$ между двумя вещественными векторными пространствами является линейным тогда и только тогда, когда

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \ldots + \lambda_\ell T(v_\ell)$$

для любого набора векторов $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_\ell \in V$ и любого набора скаляров $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_\ell \in \mathbb{R}$.

Задача 1. Докажите вышеприведённую теорему по индукции. Прежде чем доказывать теорему, дайте точное определение линейного отображения.

Задача 2. Веб-дизайнер Петя преобразовал квадрат с помощью такого CSS кода:

```
rotate(-45deg) scale(2, 3) rotate(45deg)
```

(на русском языке это означает, что сначала квадрат повернули на 45° против часовой стрелки относительно начала координат, потом результат растянули по оси x в два раза, а по оси y — в три раза, и наконец повернули на 45° по часовой стрелке тоже относительно начала координат).

(а) Нарисуйте образ квадрата при Петином преобразовании.[1]

(б) Проверьте, что Петино преобразование линейно.

(в) Помогите Пете записать его преобразование в матричной форме:

```
matrix(a,b,c,d,0,0)
```

(то есть найдите такие константы a, b, c и d, что (x, y) преобразуется в $(ax+by, cx+dy)$ для всех пар (x, y) вещественных чисел).

Задача 3. Постройте графики отображений:

(а) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\quad T : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$.

(б) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\quad T : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$.

(в) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $\quad T : t \mapsto (t, t)$.

(г) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $\quad T : t \mapsto (t, t^2)$.

Какие из этих отображений являются линейными?

Задача 4. Классифицируйте все линейные отображения из прямой в другую прямую, из плоскости в прямую, из прямой в плоскость, из плоскости в другую плоскость, из трёхмерного пространства в плоскость и из плоскости в трёхмерное пространство.

Задача 5. Дано линейное отображение $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Известно, что

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Найдите такую матрицу A, что для любого вектора $X \in \mathbb{R}^3$ и его образа $Y = T(X)$ выполнено матричное тождество: $AX = Y$.

[1] Можете себя проверить здесь https://www.w3schools.com/css/css3_2dtransforms.asp

Задача 6. (а) Докажите, что каждое линейное отображение трёхмерного пространства в себя переводит прямую либо в прямую, либо в нулевой вектор.

(б) Дайте определение прямой в произвольном векторном пространстве и обобщите утверждение пункта (а).

Цель следующих шести задач — классификация движений школьной плоскости. Нас будут интересовать все движения, не обязательно сохраняющие начало координат.

Задача 7. Докажите, что каждое движение плоскости M однозначно определяется образами $M(A)$, $M(B)$, $M(C)$ трёх попарно различных точек A, B и C.

Задача 8. (а) Докажите, что каждое движение плоскости можно представить в виде композиции одного, двух или трёх отражений.

(б) Покажите, что композиция чётного числа отражений сохраняет ориентацию плоскости (то есть переводит букву "Г" в букву "Г"), а композиция нечётного числа отражений меняет ориентацию (то есть переводит букву "Г" в букву "L").

Задача 9. (а) Докажите, что композиция двух отражений — это либо поворот, либо параллельный перенос.

(б) Докажите, что каждый поворот можно представить в виде композиции двух отражений.

(в) Докажите, что каждый параллельный перенос можно представить в виде композиции двух отражений.

Задача 10 (Теорема Шаля)**.** Каждое собственное (=сохраняющее ориентацию) движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос. Докажите!

Задача 11. Из теоремы Шаля следует, что композиция двух поворотов — это либо поворот, либо параллельный перенос. Пусть R_1 — это поворот на угол α вокруг точки A, а R_2 — поворот на угол β вокруг точки B.

(а) При каких условиях на α, β, A и B композиция $R_1 \circ R_2$ окажется параллельным переносом? На какой вектор?

(б) Постройте центр и угол поворота $R_1 \circ R_2$, если это поворот.

Задача 12. Докажите, что каждое несобственное движение плоскости — это либо отражение, либо скользящая симметрия.

Задача 13 ($\star$)**.** Линейное отображение $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задано формулой:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Является ли T движением пространства? Если является, то опишите T геометрически (вращение, отражение,…).