Геометрия, 1-й модуль 2020 г.

Семинары 7-8. Базис и размерность

факультет математики, НИУ ВШЭ

В задачах используется определения базиса и размерности векторного пространства, а также определения линейно зависимого и порождающего наборов векторов.

Для запоминания. Набор векторов $(v_1, \ldots, v_\ell)$ в вещественном векторном пространстве V линейно зависим тогда и только тогда, когда для некоторого i найдутся такие скаляры $(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_\ell)$, что выполнено тождество:

$$v_i = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_\ell v_\ell.$$

Задача 1. (а) Докажите вышеприведённую теорему. Прежде чем доказывать, дайте строгое определение линейно зависимого набора векторов.

(б) Приведите пример линейно зависимого набора, в котором *ровно один* вектор из набора представляется в виде линейной комбинации остальных векторов.

(в) Приведите пример линейно зависимого набора из 2021 вектора, в котором *каждый* вектор из набора представляется в виде линейной комбинации остальных векторов.

Задача 2. (а) Докажите, что каждые три вектора на плоскости линейно зависимы.

(б) Докажите, что каждый базис на плоскости состоит из двух элементов.

Задача 3. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$.

(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

Задача 4. Докажите эквивалентность трёх определений базиса векторного пространства.

(1) Базис — это минимальный (по включению) порождающий набор векторов.
(2) Базис — это линейно независимый порождающий набор векторов.
(3) Базис — это максимальный (по включению) линейно независимый набор векторов.

Задача 5. Рассмотрим множество $\mathbb{R}[x]$ многочленов с вещественными коэффициентами как вещественное векторное пространство.

(а) Представьте вектор x^3 как линейную комбинацию векторов 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$.

(б) Являются ли векторы 1, $(x-1)^2$, $(x-2)^3$, x^3 линейно зависимыми?

Задача 6. Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу $n \times n$, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит 1, а все остальные коэффициенты равны 0.

(а) Для каждой матрицы E_{ij} при $n = 3$ опишите геометрически линейное отображение трёхмерного пространства в себя, заданное матрицей E_{ij} (например, представьте E_{ij} в виде композиции проекционного оператора и вращения).

(б) Докажите матричные тождества:

$$E_{ij} E_{jk} = E_{ik}; \quad E_{ij} E_{j'k} = 0 \text{ при } j \neq j'.$$

Каков геометрический смысл этих тождеств?

Задача 7. (а) Введите на множестве $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ матриц размера $m \times n$ структуру вещественного векторного пространства.

(б) Предъявите базис в пространстве $\mathrm{Mat}_{m\times n}$. Чему равна размерность?

Задача 8. (а) Покажите, что векторное пространство $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ квадратных матриц является вещественной *алгеброй*, то есть сложение матриц, умножение матрицы на скаляр и умножение матриц удовлетворяют следующим трём аксиомам:

(1) $(A+B)C = AC+BC$ (правая дистрибутивность)
(2) $C(A+B) = CA+CB$ (левая дистрибутивность)
(3) $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$ (согласованность с умножением на скаляр)

(б) Докажите, что алгебра из пункта (а) асоциативна, но не коммутативна.

Задача 9. Квадратная матрица A размера $n\times n$ называется диагональной, если все её коэффициенты кроме (возможно) a_{11}, a_{22},…, a_{nn} равны нулю.

(а) Проверьте, что диагональные матрицы образуют подпространство в пространстве $\mathrm{Mat}_{n\times n}$, и найдите размерность этого подпространства.

(б) Для диагональной матрицы $D = 2E_{11} + \frac{1}{3}E_{22} + \frac{1}{2}E_{33}$ при $n = 3$ опишите геометрически линейное отображение трёхмерного пространства в себя, заданное матрицей D. Чему примерно равно D^{10}?

(в) Проверьте, что произведение двух диагональных матриц — снова диагональная матрица.

(г) Пусть $D = \lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{22} + \ldots + \lambda_n E_{nn}$. Найдите все матрицы A, которые коммутируют с D (то есть $AD = DA$).

Задача 10. Обозначим через R_φ поворот плоскости на угол φ против часовой стрелки относительно начала координат.

(а) Убедитесь, что $R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi}$ и $R_\varphi \circ R_\psi^{-1} = R_{\varphi-\psi}$.

(б) Обозначим через A_φ матрицу поворота R_φ. Вычислите A_φ, A_ψ, A_ψ^{-1}, $A_{\varphi+\psi}$ и $A_{\varphi-\psi}$.

(в) Выведите из матричных тождеств $A_\varphi A_\psi = A_{\varphi+\psi}$ и $A_\varphi A_\psi^{-1} = A_{\varphi-\psi}$ школьные формулы для косинуса и синуса суммы и разности.

Задача 11. (а) Пусть H_ρ — гомотетия плоскости с коэффициентом $\rho > 0$ и центром в начале координат, а R_φ — поворот на угол φ против часовой стрелки относительно начала координат. Найдите матрицу композиции $H_\rho \circ R_\varphi$.

(б) Покажите, что вещественная матрица вида

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

является матрицей композиции $H_\rho \circ R_\varphi$ для некоторых $\rho > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Чему равны ρ и φ, если $a = b = 1$?

(в) Обозначим через $\mathfrak{C}$ множество всех матриц $M(a,b)$ из пункта (б). Проверьте, что сумма, разность и произведение двух матриц из $\mathfrak{C}$ тоже лежит в $\mathfrak{C}$.

(г) Найдите такую матрицу $\mathbf{1} \in \mathfrak{C}$, что $\mathbf{1}M = M = M\mathbf{1}$ для всех $M \in \mathfrak{C}$.

(д) Покажите, что если $(a,b) \neq (0,0)$, то у матрицы $M = M(a,b)$ есть обратная матрица относительно умножения (то есть такая матрица M^{-1}, что $MM^{-1} = M^{-1}M = \mathbf{1}$).

(е) Найдите такую матрицу $\mathbf{i} \in \mathfrak{C}$, что $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$.

(ж) Вспомните или прочитайте определение поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Постройте изоморфизм между $\mathfrak{C}$ и $\mathbb{C}$.