Геометрия, 1-й модуль 2020 г.

Листок 1. Геометрия и комплексные числа

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1 (Ключевая лемма для формулы Пика)**.** На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника. Решение не должно опираться на формулу Пика.

Задача 2. Можно ли ввести на комплексных числах отношение порядка $>$, согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех $a, b, c \in \mathbb{C}$ (1) из $a > b$ следует $a + c > b + c$; (2) из $a > 0$ и $b > 0$ следует, что $ab > 0$.) Решение должно содержать определения сложения и умножения комплексных чисел.

Задача 3. (а) Докажите, что угол между прямыми, пересекающимися в точке z_0 и проходящими через точки z_1 и z_2, равен аргументу отношения $V(z_2, z_1, z_0) := \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$.

(б) Докажите, что четыре точки z_0, z_1, z_2 и z_3 лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только когда их *двойное отношение*

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}$$

является вещественным числом. Решение должно содержать определения модуля и аргумента комплексного числа.

Задача 4. а) Докажите, что существует многочлен T_n, такой что $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва первого рода*).

б) Докажите, что существует многочлен U_n, такой что $\sin(nx) = \sin(x)U_{n-1}(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва второго рода*).

Задача 5. (а) На плоскости в точках $z_1, \ldots, z_n$ находятся n планет одинаковой массы. Докажите, что точки z, в которых силы тяготения этих планет уравновешиваются, являются корнями уравнения $\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \ldots + \frac{1}{z - z_n} = 0$. Напомним, что на плоскости сила тяготения убывает пропорционально расстоянию.

(б) (Проблема Максвелла) Доказать, что у системы планет из пункта (а) не более $n-1$ точки равновесия, причем оценка $n-1$ точная. Замечание: аналогичный вопрос для трехмерного пространства – известная открытая проблема.

(в) (Теорема Гаусса–Лукаса) Корни производной комплексного многочлена $f(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n)$ лежат в выпуклой оболочке $z_1, \ldots, z_n$. Напомним, что выпуклая оболочка – наименьший многоугольник, содержащий $z_1, \ldots, z_n$.

Задача 6. Сформулируйте и докажите трёхмерный аналог теоремы Шаля.

Задача 7. Будем рассматривать трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ как часть четырёхмерного пространства $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, состоящую из точек с координатами $(x, y, z, 0)$.

(а) Докажите, что левый ботинок из $\mathbb{R}^3$ можно так перевернуть в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ он станет правым ботинком.

(б) Переверните эту страницу в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы шрифт изменился на зеркальный.

(в) Докажите, что два зацепленных звена цепи в $\mathbb{R}^3$ можно так подвигать в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ они окажутся незацепленными.