Линейная алгебра в задачах

Валентина Кириченко

факультет математики, НИУ ВШЭ

1. Школьная плоскость и трёхмерное пространство

В задачах этого раздела используется известное со школы понятие координат на плоскости и в пространстве (если нужно вспомнить, что такое координаты на плоскости, то читайте [Геометрия, гл. 13 и 32]). Под вектором подразумевается направленный отрезок (= стрелка), соединяющий две точки плоскости. Векторы можно параллельно переносить в нужную точку плоскости. Складывать векторы нужно так же, как учат на уроках физики: по правилу треугольника (оно же правило параллелограмма). Также в этом разделе используется понятие матрицы и умножение матриц (об этом читайте [Ar, гл. 1, §1] или [B, гл. 1, §9]).

1. Из центра правильного шестиугольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих шести, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

2. На плоскости даны векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OX}$. Известно, что $\overrightarrow{AX} = 4\overrightarrow{XB}$. Найдите такие вещественные числа λ и μ, что выполнено равенство векторов:

$$\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}.$$

3. На плоскости нарисованы (но не подписаны) векторы u, v, $u+2v$, $\frac{1}{2}(u+v)$, $u-v$ и $2u+v$. Чтобы воспроизвести рисунок, нарисуйте векторы с координатами $(-1,1)$, $(-1,5)$, $(0,2)$, $(1,3)$, $(1,7)$, $(2,2)$. Найдите координаты векторов u и v.

4. Никон выбрал два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 на плоскости и так сопоставил каждому вектору v пару Н-координат (x_1, x_2), чтобы выполнялось тождество:

$$v = x_1e_1 + x_2e_2.$$

Родион выбрал два других неколлинеарных вектора f_1 и f_2 и так сопоставил вектору v пару Р-координат (y_1, y_2), что

$$v = y_1f_1 + y_2f_2.$$

Известно, что векторы с Н-координатами $(1,2)$ и $(3,4)$ имеют Р-координаты $(1,4)$ и $(2,3)$, соответственно. Найдите Р-координаты вектора, имеющего Н-координаты $(5,8)$.

Для запоминания. Линейному отображению

$$(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$$

плоскости в себя соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

5. Найдите матрицы следующих линейных отображений на плоскости с координатами x и y:

(а) отражение относительно прямой $\{x=y\}$,
(б) поворот на $\frac{\pi}{4}$ относительно начала координат,
(в) гомотетия с коэффициентом 10 относительно начала координат,
(г) проекция на ось x вдоль оси y.

Задача из лекции. Пусть S — отражение относительно прямой $\{y = 0\}$, а T — поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат. Найдите композицию $T \circ S$ отображений T и S.

Решение. Нарисуем вектор v, идущий из начала координат. Обозначим через φ угол между вектором v и осью x. Отразим v относительно горизонтальной оси (то есть применим отображение S). Мы получим новый вектор $S(v)$, который имеет ту же длину, что и v, но образует угол $(-\varphi)$ с осью x. Теперь повернём $S(v)$ против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат. Получим вектор $T(S(v))$, который составляет угол $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ с осью x. Поэтому композицию $T \circ S$ можно описать так: отображение $T \circ S$ переводит вектор v в вектор $T(S(v))$ той же длины, при этом угол между вектором $T(S(v))$ и вектором v равен $(\frac{\pi}{2} - 2\varphi)$, если мерять угол против часовой стрелки.

В первом решении мы несомненно нашли композицию $T \circ S$ — мы дали явный рецепт, как по вектору v строить вектор $T(S(v))$. Однако пользоваться этим рецептом не очень просто. Например, нужно хорошо разбираться в том, что такое угол (иначе не получится правильно применить рецепт в случае $(\frac{\pi}{2} - 2\varphi) < 0$). Запрограммировать этот рецепт (то есть объяснить его компьютеру) тоже не очень просто. Например, анимации (движение картинок) в CSS можно программировать двумя способами (ниже мы поговорим об этих способах подробней), но способ из нашего рецепта в CSS не предусмотрен.

Другое решение. Попробуем упростить рецепт из первого решения. Заметим, что если вектор v образует угол $\frac{\pi}{4}$ с осью x, то $T(S(v)) = v$. Поэтому прямая $\{x = y\}$ остаётся неподвижной при преобразовании $T \circ S$ — каждый вектор на этой прямой переходит в себя. Заметим, что и T, и S — это движения плоскости, то есть преобразования, которые сохраняют длины и углы. Поэтому их композиция $T \circ S$ тоже сохраняет длины и углы. Проверьте, что движение, у которого есть неподвижная прямая l, является либо тождественным преобразованием (то есть переводит каждый вектор в себя), либо отражением относительно прямой l.[1] Преобразование $T \circ S$ не тождественно (например, вектор, направленный вдоль оси y переходит в вектор, направленный вдоль оси x). Следовательно, $T \circ S$ является отражением относительно оси $\{x = y\}$.

Рецепт из второго решения гораздо проще и геометрически наглядней, чем рецепт из первого решения. Его легко применит любой школьник (или даже дошкольник), знающий, что такое осевая (зеркальная) симметрия. Правда, рецепт нельзя буквально запрограммировать, например, в CSS.

Третье решение. Попробуем решить задачу алгебраически. В координатах отображение S записывается так:

$$S : (x, y) \mapsto (x, -y).$$

Отображение T записывается так:

$$T : (x, y) \mapsto (-y, x).$$

Теперь вычислим $T \circ S$ в координатах:

$$(x, y) \xrightarrow{\mathrm{S}} (x, -y) \xrightarrow{\mathrm{T}} (-(-y), x).$$

[1] Это очень важный факт! Проверьте обязательно, если раньше не проверяли. И даже если проверяли, убедитесь, что вы по-прежнему умеете это доказывать.

Получаем $T \circ S : (x, y) \mapsto (y, x)$.

Рецепт из третьего решения легко запрограммировать, например, в CSS. Однако рецепт сложно объяснить школьнику, не владеющему методом координат. Линейная алгебра — это как раз то, что нужно выучить, чтобы легко пользоваться сразу двумя рецептами (и геометрическим, и алгебраическим). Какую бы задачу по линейной алгебре вы не решали, старайтесь прежде всего научиться свободно переходить от геометрического решения к алгебраическому, и обратно.

6. Пусть S — отражение относительно прямой $\{y = 0\}$, а T — поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат.

(а) Покажите, что композиция $S \circ T$ отображений S и T является отражением относительно некоторой прямой, и найдите эту прямую.

(б) Найдите матрицы отображений S, T и $S \circ T$.

7. Через A_S и A_T, соответственно, обозначены матрицы линейных отображений S и T плоскости в себя. Проверьте, что произведение матриц соответствует композиции отображений, то есть матрица отображения $S \circ T$ совпадает с матрицей ST.

8. На плоскости с координатами (x, y) выпишите матрицу поворота против часовой стрелки на угол φ относительно начала координат.

9. На плоскости дан равносторонний треугольник ABC с центром в начале координат.

(а) Опишите геометрически (как повороты, отражения, и т.п.) все движения плоскости, которые переводят треугольник ABC в себя.

(б) Пусть S — отражение относительно оси симметрии треугольника, проходящей через вершину A, а T — поворот против часовой стрелки относительно центра треугольника на угол $\frac{2\pi}{3}$. Опишите геометрически движения ST, T^2 и STS.

(в) Представьте каждое движение из пункта (а) в виде композиции движений S и T.

(г) Найдите матрицы движений из пункта (а) в какой-нибудь системе координат.

(д) Можно ли в пункте (г) выбрать систему координат так, чтобы все матрицы имели целые коэффициенты?

10. Лебедь, рак и щука тянут воз вдоль векторов $(1, -1, 2)$, $(-2, 1, -1)$ и $(1, 1, -4)$, соответственно. Чему должны быть равны приложенные силы по абсолютной величине, чтобы воз был и ныне там?

11. $ABCDEFGH$ — куб в пространстве. Вершины куба обозначены таким образом, что $ABCD$ и $EFGH$ — грани куба, а AE — ребро куба. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AG}$ через векторы $u = \overrightarrow{AC}$, $v = \overrightarrow{AF}$ и $w = \overrightarrow{AH}$.

12. В трёхмерном пространстве с координатами (x, y, z) найдите матрицу поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x = y = z\}$.

2. Векторные пространства

В задачах этого раздела используется аксиоматическое определение вещественного векторного пространства. Краткая версия определения приводится ниже, полную версию можно найти в [Ar, гл. 2, §1; гл. 3, §1] или [B, гл. 1, SS2, 7])

Для запоминания. В вещественном (скаляры = вещественные числа) векторном пространстве

(1) векторы образуют абелеву группу по сложению;
(2) умножение вектора на скаляр ассоциативно: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;
(3) умножение вектора на вещественное число 1 — это тождественное преобразование: $1v = v$;
(4) умножение вектора на скаляр дистрибутивно и относительно сложения скаляров, и относительно сложения векторов:

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v; \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

Из аксиоматического определения нельзя понять ни что такое векторное пространство, ни что такое вектор (предполагается, что у нас уже есть интуитивное представление об этих понятиях, основанное на личном опыте работы со школьной плоскостью и трёхмерным пространством). Зато из аксиом можно строго логически выводить теоремы, и эти теоремы будут верны для всех векторных пространств без исключения, какими бы экзотическими они ни были. Сейчас мы будем доказывать теоремы, а попутно знакомиться с полезными и интересными примерами векторных пространств.

13. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ — множество всех упорядоченных пар (x_1, x_2) вещественных чисел. Зададим на V структуру вещественного векторного пространства:

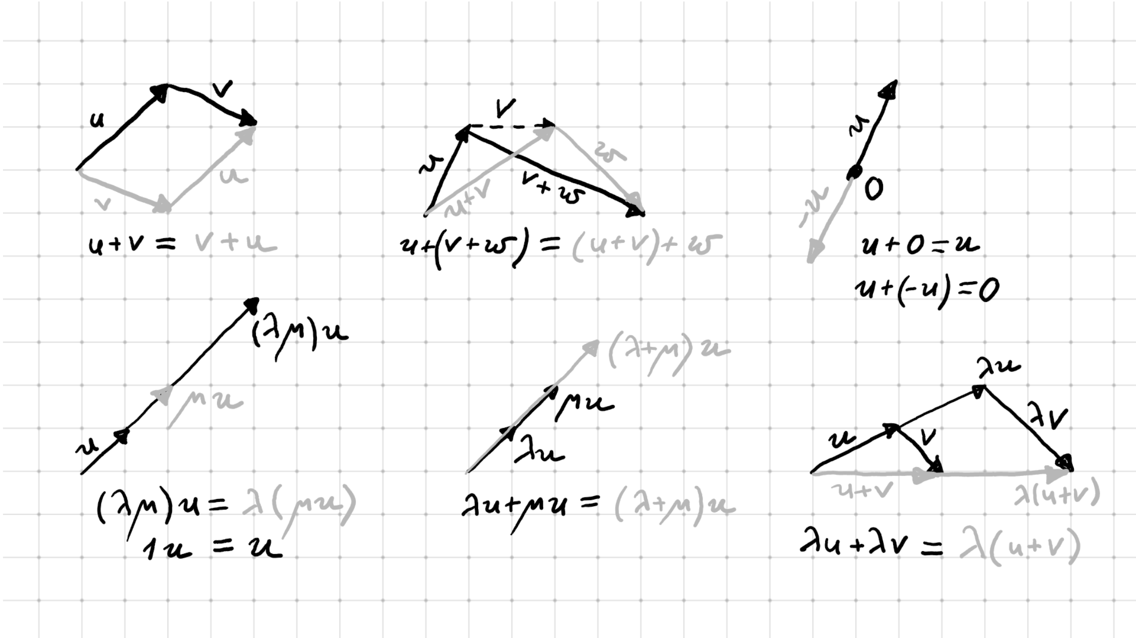
- $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ (сложение векторов);
- $\lambda(u_1, u_2) := (\lambda u_1, \lambda u_2)$ (умножение вектора на скаляр).

Проверьте, что V удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства.

Решение. Заметим, что упорядоченную пару (u_1, u_2) можно интерпретировать как координаты направленного отрезка u (= школьного вектора) на плоскости с координатами (x_1, x_2). Проверьте, что сложение школьных векторов u и v по правилу треугольника соответствует покоординатному сложению, то есть $w = u + v$ тогда и только тогда, когда $(w_1, w_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$.[2] Умножение школьных векторов на скаляр λ (= вещественное число λ) — это гомотетия с коэффициентом λ. В частности, если $\lambda < 0$, то векторы v и λv направлены в противоположные стороны.

Геометрическая интерпретация сложения векторов и умножения вектора на скаляр позволяет нам наглядно убедиться, что все аксиомы векторного пространства выполнены (см. рисунок).

[2]Это очень важный факт! Алгебраическое сложение векторов совпадает с геометрическим.



Что впрочем не означает, что эти аксиомы легко вывести строго логически из свойств школьной плоскости. Например, аксиома дистрибутивности

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$

эквивалентна теореме о пропорциональных отрезках. Доказать последнюю не так-то непросто (см. [Ш]).

Другое решение. Выведем все аксиомы векторного пространства из свойств вещественных чисел. Поскольку $(u_1, u_2) = (u_1', u_2')$ тогда и только тогда, когда $u_1 = u_1'$ и $v_1 = v_1'$, все тождества можно проверять для первой и второй координаты по отдельности. Поэтому ниже индекс i пробегает два значения: 1 и 2.

(1) (a) $(u_1,u_2)+(v_1,v_2) = (v_1,v_2)+(u_1,u_2)$, потому что $u_i+v_i = v_i+u_i$ (*сложение вещественных чисел коммутативно*);
  (b) $((u_1,u_2)+(v_1,v_2))+(w_1,w_2) = (u_1,u_2)+((v_1,v_2)+(w_1,w_2))$, потому что $(u_i+v_i)+w_i = u_i+(v_i+w_i)$ (*сложение вещественных чисел ассоциативно*);
  (c) существует нулевой вектор $(0,0)$, потому что $v_i + 0 = v_i$ (*свойство вещественного числа* 0);
  (d) для каждого вектора (v_1,v_2) существует обратный ему вектор $(-v_1,-v_2)$, потому что $v_i + (-v_i) = 0$ (*существование противоположного числа*);

(2) $(\lambda\mu)(v_1,v_2) = \lambda(\mu(v_1,v_2))$, потому что $(\lambda\mu)v_i = \lambda(\mu v_i)$ (*умножение вещественных чисел ассоциативно*);

(3) $1(v_1,v_2) = (v_1,v_2))$, потому что $1 \cdot v_i = v_i$ (*свойство вещественного числа* 1);

(4) (a) $(\lambda+\mu)(v_1,v_2) = \lambda(v_1,v_2)+\mu(v_1,v_2)$, потому что $(\lambda+\mu)v_i = \lambda v_i + \mu v_i$ (*дистрибутивность вещественных чисел*);
  (b) $\lambda((u_1,u_2)+(v_1+v_2)) = \lambda(u_1,u_2)+\lambda(v_1,v_2)$, потому что $\lambda(u_i+v_i) = \lambda u_i + \lambda v_i$ (*дистрибутивность вещественных чисел*).

Заметим, что во втором решении нам не пришлось напрягаться — решение свелось к формальному сравнению аксиом векторного пространства и свойств вещественных чисел. Нам не понадобилась теорема о пропорциональных отрезках. Однако свойства вещественных чисел тоже нелегко обосновать в рамках школьной геометрии. Например, попробуйте определить геометрически умножение вектора на $\sqrt{2}$ или на

π. Так что во втором решении мы просто замели под ковёр сложности, связанные с понятием вещественного числа. Строгое построение вещественных чисел с доказательством всех их свойств выходит за рамки линейной алгебры и обычно проводится в курсе анализа.

14. Определите векторное пространство $\mathbb{R}^n$ для каждого натурального n.

Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ называется *координатным векторным пространством размерности* n. Его векторы по самой своей природе являются наборами вещественных чисел. Как мы позже выясним, векторы в абстрактном векторном пространстве тоже можно задавать наборами чисел (*координатами*). В конкретных задачах важно научиться выбирать координаты так, чтобы уменьшить объём вычислений.

15. Пусть V — множество всех квадратных трёхчленов, то есть таких функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x) = ax^2 + bx + c$ (коэффициенты a, b и c — вещественные константы). Зададим на V структуру вещественного векторного пространства:

(1) $(u + v)(x) := u(x) + v(x)$ (сложение векторов);
(2) $(\lambda u)(x) := \lambda u(x)$ (умножение вектора на скаляр).

(а) Проверьте, что V удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства.
(б) Найдите такой квадратный трёхчлен f, что

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 20, \quad f(3) = 200.$$

Решение. (а) Сопоставим квадратному трёхчлену $f(x) = ax^2 + bx + c$ тройку чисел $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Легко проверить, что при таком сопоставлении сумме трёхчленов соответствует сумма векторов в $\mathbb{R}^3$, а умножению трёхчлена на скаляр соответствует умножение вектора в $\mathbb{R}^3$ на скаляр. Таким образом, мы можем отождествить V и $\mathbb{R}^3$ с сохранением всех операций. Тем самым, все аксиомы векторного пространства выполняются в V, поскольку они выполняются в $\mathbb{R}^3$.

(б) Будем искать неизвестные коэффициенты a, b и c, подставляя в тождество $f(x) = ax^2 + bx + c$ значения $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. Получим три линейных уравнения на три неизвестных:

$$a + b + c = 2; \quad 4a + 2b + c = 20; \quad 9a + 3b + c = 200.$$

Мы пока не изучили высокотехнологичных методов решения систем линейных уравнений, но идея последовательного исключения переменных сработает здесь и без всякой техники. Вычтем из второго и третьего уравнения первое, чтобы избавиться от переменной c. Получим эквивалентную (то есть с тем же множеством решений) систему:

$$a + b + c = 2; \quad 3a + b = 18; \quad 8a + 2b = 198.$$

Теперь поделим все коэффициенты в третьем уравнении пополам и вычтем из результата второе уравнение, чтобы избавиться от переменной b:

$$a + b + c = 2; \quad 3a + b = 18; \quad a = 81.$$

Мы нашли $a = 81$, теперь можно найти $b = -225$ из второго уравнения, и $c = 146$ из третьего уравнения.

Оказывается, решение в пункте (б) не самое оптимальное. Есть более короткое решение (интерполяционная формула Лагранжа), основанное на другом выборе отождествления векторных пространств V и $\mathbb{R}^3$.

Другое решение. (а) Попробуем отждествить V и $\mathbb{R}^3$ так, чтобы проще было решить пункт (б). Сначала решим три вспомогательных задачи. Найдём такой трёхчлен f_1, что $f_1(1) = 1$ и $f_1(2) = f_1(3) = 0$. Поскольку 2 и 3 — корни трёхчлена f, получаем тождество $f(x) = a(x-2)(x-3)$. Подставляя в обе части $x = 1$, находим $a = \frac{1}{2}$. Аналогичным образом найдём такой трёхчлен f_2, что $f_2(2) = 1$ и $f_2(1) = f_1(3) = 0$, и такой трёхчлен f_3, что $f_3(3) = 1$ и $f_3(1) = f_3(2) = 0$. Получим

$$f_1 = \frac{1}{2}(x-2)(x-3); \quad f_2 = -(x-1)(x-3); \quad f_3 = \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

Теперь отождествим V и $\mathbb{R}^3$ таким образом: сопоставим трёхчлену $f(x)$ тройку чисел $(f(1), f(2), f(3)) \in \mathbb{R}^3$. Проверим, что это взаимно-однозначное соответствие.

Действительно, если два трёхчлена f и g перешли в одну и ту же тройку, то $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$, $f(3) = g(3)$. Поэтому у трёхчлена $f-g$ будет три попарно различных корня: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Следовательно, $f-g = 0$,[3] то есть $f = g$. С другой стороны, любую тройку $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ можно представить как $(f(1), f(2), f(3))$. Достаточно взять $f(x) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + u_3 f_3(x)$.

Проверьте, что соответствие $f \mapsto (f(1), f(2), f(3))$ между V и $\mathbb{R}^3$ согласовано с операциями сложения векторов и умножения на скаляр.

(б) После артподготовки, проведённой в пункте (а), пункт (б) решается в одну строчку:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}(x-2)(x-3) + 20 \cdot (-(x-1)(x-3)) + 200 \cdot \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

Отсюда мораль: на одном и том же векторном пространстве полезно рассматривать разные координаты, то есть разные отождествления между абстрактным векторным пространством и координатным пространством $\mathbb{R}^n$.

16 (Единственность нулевого вектора)**.** Докажите, что в векторном пространстве не может быть двух различных нулевых векторов.

Решение. Пусть 0_1 и 0_2 — два нулевых вектора (возможно различных, а возможно одинаковых). Мы хотим доказать, что $0_1 = 0_2$. Вычислим сумму $0_1 + 0_2$ двумя способами.

(1) $0_1 + 0_2 = 0_2$, потому что 0_1 — нулевой вектор.
(2) $0_1 + 0_2 = 0_1$, потому что 0_2 — нулевой вектор.

Отсюда получаем $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$, что и требовалось доказать.

17 (Единственность обратного вектора)**.** Докажите, что у каждого вектора в векторном пространстве есть ровно один обратный вектор.

18. Студент Вася на лекции переписал с доски две теоремы о векторных пространствах:

(1) $0v = 0$;
(2) $\lambda 0 = 0$.

Чтобы различить $0_{\mathbb{R}}$ (вещественное число 0) и 0_V (нулевой вектор), лектор использовала цветные мелки, но при переписывании цвета не сохранились.

(а) Помогите Васе восстановить строгие формулировки обеих теорем.

(б) Докажите сформулированные вами в пункте (а) теоремы.

[3] Здесь мы воспользовались важным фактом: если у многочлена степени n есть $n+1$ попарно различных корней, то многочлен тождественно равен нулю. Если вы раньше не сталкивались с таким фактом, то обязательно подумайте, как его объяснить.

19. Пусть $V = \mathbb{R}^+$ — множество всех строго положительных вещественных чисел. Попробуем задать на V структуру вещественного векторного пространства:

- $u \boxplus v := uv$ (сложение векторов);
- $\lambda \odot u := u^\lambda$ (умножение вектора на скаляр).

(а) Вычислите $(\lambda \odot u) \boxplus (\mu \odot v) \boxplus (\nu \odot w)$ для $\lambda = \mu = -1$, $\nu = 2$, $u = 2$, $v = w = 3$.
(б) Все ли аксиомы векторного пространства выполняются в V?
(в) Придумайте линейное отображение $T : V \to \mathbb{R}$, которое является биекцией.

20. Докажите, что в каждом вещественном векторном пространстве V для всех векторов $v \in V$ выполнено тождество:

$$(-1)v = -v.$$

(Если вам кажется, что тут нечего доказывать, то запишите формулировку теоремы в частном случае: для векторного пространства из предыдущей задачи. Какую формулу из школьной алгебры вы получили, и в каком классе эту формулу проходят?)

Решение. Эта формула обобщает сразу две формулы из школьной алгебры:

$$(-1) \cdot a = -a;$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

для всех вещественных чисел a. Первую формулу проходят в 5-ом классе, вторую — в 8-ом. Некоторых школьников эти формулы удивляют, а некоторым кажутся самоочевидными. Например, прямое следствие первой формулы — знаменитое тождество $(-1)(-1) = 1$, в которое не все верят, когда первый раз видят.

Мы не будем разбираться, верны ли эти формулы "на самом деле" (что бы это ни значило). Это вопрос философский. Мы докажем лишь, что если верны аксиомы векторного пространства, то верна формула

$$(-1)v = -v.$$

Сначала докажем равенсто $v + (-1)v = 0_V$. Действительно,

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0_{\mathbb{R}}v = 0_V.$$

В этой цепочке тождеств мы использовали аксиомы (какие именно?) и утверждение, которое мы ещё раньше вывели из аксиом. А именно, утверждение $0_{\mathbb{R}}v = 0_V$ (доказанное в задаче 18).

Далее, из равенства $v + (-1)v = 0_V$ следует, что v и $(-1)v$ обратны относительно сложения. Поэтому $(-1)v = -v$ (здесь мы пользуемся доказанной в задаче 17 единственностью обратного вектора).

Список литературы

[Ar] M. Artin, *Algebra*, Pearson, 2011
[В] Э.Б. Винберг, *Курс алгебры*, МЦНМО, 2019
[Ш] А. Шень, *О "математической строгости" и школьном курсе математики*, МЦНМО, 2006
[Геометрия] А. Шень, *Геометрия в задачах*, МЦНМО, 2017