Линейная алгебра в задачах

Валентина Кириченко

факультет математики, НИУ ВШЭ

1. Школьная плоскость и трёхмерное пространство

В задачах этого раздела используется известное со школы понятие координат на плоскости и в пространстве (если нужно вспомнить, что такое координаты на плоскости, то читайте [Геометрия, гл. 13 и 32]). Под вектором подразумевается направленный отрезок (= стрелка), соединяющий две точки плоскости. Векторы можно параллельно переносить в нужную точку плоскости. Складывать векторы нужно так же, как учат на уроках физики: по правилу треугольника (оно же правило параллелограмма).

1. Из центра правильного шестиугольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих шести, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

Векторы можно умножать на произвольные вещественные числа. Если число λ положительно, то векторы $\lambda\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA}$ сонаправлены, причём длина первого вектора равна длине второго вектора, умноженной на λ. Если $\lambda < 0$, то векторы $\lambda\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA}$ направлены в противоположные стороны, причём длина первого вектора равна длине второго вектора, умноженной на $(-\lambda)$. Если $\lambda = 0$, то $\lambda\overrightarrow{OA}$ — это нулевой вектор (то есть стрелка, у которой начало совпадает с концом).

2. На плоскости даны векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OX}$. Известно, что $\overrightarrow{AX} = 4\overrightarrow{XB}$. Найдите такие вещественные числа λ и μ, что выполнено равенство векторов:

$$\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}.$$

3. На плоскости нарисованы (но не подписаны) векторы u, v, $u+2v$, $\frac{1}{2}(u+v)$, $u-v$ и $2u+v$. Чтобы воспроизвести рисунок, нарисуйте векторы с координатами $(-1,1)$, $(-1,5)$, $(0,2)$, $(1,3)$, $(1,7)$, $(2,2)$. Найдите координаты векторов u и v.

В школе обычно используют прямоугольную систему координат, но в линейной алгебре система координат может быть любой. Чтобы задать вектор координатами, нужно выбрать две пересекающиеся прямые (= оси координат), и на каждой прямой задать масштаб и положительное направление (например, отметить число 1). Более формально, можно выбрать два неколлинеарных вектора e_1 и e_2, и сказать, что их координаты — это $(1,0)$ и $(0,1)$. Тогда например, векторы $2e_1$, e_1+e_2, $\frac{e_2}{2}$ и $e_1 - e_2$ имеют координаты $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,\frac{1}{2})$ и $(1,-1)$, соответственно. В общем случае вектор $x_1e_1 + x_2e_2$ имеет координаты (x_1, x_2) (убедитесь, что каждый вектор можно представить в виде $x_1e_1 + x_2e_2$ для подходящих вещественных чисел x_1 и x_2).

4. Никон выбрал два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 на плоскости и так сопоставил каждому вектору v пару Н-координат (x_1, x_2), чтобы выполнялось тождество:

$$v = x_1e_1 + x_2e_2.$$

Родион выбрал два других неколлинеарных вектора f_1 и f_2 и так сопоставил вектору v пару Р-координат (y_1, y_2), что

$$v = y_1f_1 + y_2f_2.$$

Известно, что векторы с Н-координатами $(1,2)$ и $(3,4)$ имеют Р-координаты $(1,4)$ и $(2,3)$, соответственно. Найдите Р-координаты вектора, имеющего Н-координаты $(5,8)$.

5. Лебедь, рак и щука тянут воз вдоль векторов $(1,-1,2)$, $(-2,1,-1)$ и $(1,1,-4)$, соответственно. Чему должны быть равны приложенные силы по абсолютной величине, чтобы воз был и ныне там?

6. $ABCDEFGH$ — куб в пространстве. Вершины куба обозначены таким образом, что $ABCD$ и $EFGH$ — грани куба, а AE — ребро куба. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AG}$ через векторы $u=\overrightarrow{AC}$, $v=\overrightarrow{AF}$ и $w=\overrightarrow{AH}$.

2. Линейные отображения и матрицы

Векторы можно задавать наборами координатами, то есть строками (или столбцами) чисел. Оказывается, простейшие преобразования плоскости тоже можно задавать наборами чисел, организованными в таблицы размера 2×2. Прямоугольные таблицы, заполненные числами, называются *матрицами.* Больше о матрицах можно прочесть в [Ar, гл. 1, §1] или [B, гл. 1, §9]).

Для запоминания. Линейному отображению

$$(x,y)\mapsto(ax+by,cx+dy)$$

плоскости в себя соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Почему мы записали набор чисел (a,b,c,d) в виде 2×2 матрицы, а не в виде 4×1 матрицы (то есть столбца чисел) или в виде 1×4 матрицы (то есть строки)? Потому что при такой записи линейное отображение удобно задаётся с помощью операции *умножения матрицы на столбец.* Пусть A — матрица размера 2×2, а X — столбец высоты 2. Определим их произведение AX:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\Rrightarrow\quad AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}.$$

Видно, что умножение матрицы на столбец состоит из двукратного применения операции *умножения строки на столбец*:

$$\boxed{a_{11}}\ \boxed{a_{12}}\ \cdot\ \begin{matrix}\boxed{x_1}\\ \boxed{x_2}\end{matrix}\ =\ \boxed{a_{11}x_1+a_{12}x_2}\ .$$

Умножение строки на столбец очень похоже на скалярное произведение векторов. В обоих случаях результат умножения — это число (хотя сомножители отнюдь не числа). Чтобы умножить матрицу на столбец, нужно сначала умножить первую строку матрицы на столбец, затем — вторую строку на столбец. Результаты (два числа) нужно записать в виде столбца: первый результат — в первой строке, второй результат — во второй строке.

7. Определите умножение матрицы $m\times n$ (то есть m строк и n столбцов) на столбец высоты n для

(а) $n=2$, $m=3$; (б) $n=m=3$.

8. Найдите матрицы следующих линейных отображений на плоскости с координатами x и y:

(а) отражение относительно прямой $\{x = y\}$,
(б) поворот на $\frac{\pi}{4}$ относительно начала координат,
(в) гомотетия с коэффициентом 10 относительно начала координат,
(г) проекция на ось x вдоль оси y.

9. Пусть S — отражение относительно прямой $\{y = 0\}$, а T — поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат. Найдите композицию $T \circ S$ отображений T и S.

Решение. Нарисуем вектор v, идущий из начала координат. Обозначим через φ угол между вектором v и осью x. Отразим v относительно горизонтальной оси (то есть применим отображение S). Мы получим новый вектор $S(v)$, который имеет ту же длину, что и v, но образует угол $(-\varphi)$ с осью x. Теперь повернём $S(v)$ против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат. Получим вектор $T(S(v))$, который составляет угол $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ с осью x. Поэтому композицию $T \circ S$ можно описать так: отображение $T \circ S$ переводит вектор v в вектор $T(S(v))$ той же длины, при этом угол между вектором $T(S(v))$ и вектором v равен $(\frac{\pi}{2} - 2\varphi)$, если мерять угол против часовой стрелки.

В первом решении мы несомненно нашли композицию $T \circ S$ — мы дали явный рецепт, как по вектору v строить вектор $T(S(v))$. Однако пользоваться этим рецептом не очень просто. Например, нужно хорошо разбираться в том, что такое угол (иначе не получится правильно применить рецепт в случае $(\frac{\pi}{2} - 2\varphi) < 0$). Запрограммировать этот рецепт (то есть объяснить его компьютеру) тоже не очень просто. Например, анимации (движение картинок) в CSS можно программировать двумя способами (ниже мы поговорим об этих способах подробней), но способ из нашего рецепта в CSS не предусмотрен.

Другое решение. Попробуем упростить рецепт из первого решения. Заметим, что если вектор v образует угол $\frac{\pi}{4}$ с осью x, то $T(S(v)) = v$. Поэтому прямая $\{x = y\}$ остаётся неподвижной при преобразовании $T \circ S$ — каждый вектор на этой прямой переходит в себя. Заметим, что и T, и S — это движения плоскости, то есть преобразования, которые сохраняют длины и углы. Поэтому их композиция $T \circ S$ тоже сохраняет длины и углы. Проверьте, что движение, у которого есть неподвижная прямая l, является либо тождественным преобразованием (то есть переводит каждый вектор в себя), либо отражением относительно прямой l.[1] Преобразование $T \circ S$ не тождественно (например, вектор, направленный вдоль оси y переходит в вектор, направленный вдоль оси x). Следовательно, $T \circ S$ является отражением относительно оси $\{x = y\}$.

Рецепт из второго решения гораздо проще и геометрически нагляднее, чем рецепт из первого решения. Его легко применит любой школьник (или даже дошкольник), знающий, что такое осевая (зеркальная) симметрия. Правда, рецепт нельзя буквально запрограммировать, например, в CSS.

Третье решение. Попробуем решить задачу алгебраически. В координатах отображение S записывается так:

$$S : (x, y) \mapsto (x, -y).$$

[1] Это очень важный факт! Проверьте обязательно, если раньше не проверяли. И даже если проверяли, убедитесь, что вы по-прежнему умеете это доказывать.

Отображение T записывается так:

$$T : (x, y) \mapsto (-y, x).$$

Теперь вычислим $T \circ S$ в координатах:

$$(x, y) \xrightarrow{\text{S}} (x, -y) \xrightarrow{\text{T}} (-(-y), x).$$

Получаем $T \circ S : (x, y) \mapsto (y, x)$.

Рецепт из третьего решения легко запрограммировать, например, в CSS. Однако рецепт сложно объяснить школьнику, не владеющему методом координат. Линейная алгебра — это как раз то, что нужно выучить, чтобы легко пользоваться сразу двумя рецептами (и геометрическим, и алгебраическим). Какую бы задачу по линейной алгебре вы не решали, старайтесь прежде всего научиться свободно переходить от геометрического решения к алгебраическому, и обратно.

10. Пусть S — отражение относительно прямой $\{y = 0\}$, а T — поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат.

(а) Покажите, что композиция $S \circ T$ отображений S и T является отражением относительно некоторой прямой, и найдите эту прямую.

(б) Найдите матрицы отображений S, T и $S \circ T$.

Можно ли найти матрицу композиции $S \circ T$ преобразований S и T чисто алгебраически по матрицам преобразований S и T? Оказывается, есть операция *умножения матриц*, которая даёт нужный способ. Эта операция прямо обобщает операцию умножения матрицы на столбец. Пусть A и B — две матрицы размера 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Их произведением называется матрица размера 2×2

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы перемножить две матрицы 2×2 нужно разбить первую матрицу на две строки, а вторую матрицу — на два столбца, после чего произвести 4 операции умножения строки на столбец. Результат умножения i-той строки первой матрицы и j-того столбца второй матрицы нужно записать на пересечении i-той строки и j-того столбца матрицы произведения:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}\ a_{12}} \\ \boxed{a_{21}\ a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{a_{11}\ a_{12}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}}} & \boxed{\boxed{a_{11}\ a_{12}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}}} \\ \boxed{\boxed{a_{21}\ a_{22}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}}} & \boxed{\boxed{a_{21}\ a_{22}} \cdot \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}}} \end{pmatrix}.$$

11. Определите произведение двух матриц

(а) размеров 3×2 и 2×3;

(б) размеров 2×3 и 3×2;

(в) размера 3×3.

12. Через A_S и A_T, соответственно, обозначены матрицы линейных отображений S и T плоскости в себя. Проверьте, что произведение матриц соответствует композиции отображений, то есть матрица отображения $S \circ T$ совпадает с матрицей $A_S A_T$.

13. На плоскости с координатами (x, y) выпишите матрицу поворота против часовой стрелки на угол φ относительно начала координат.

14. На плоскости дан равносторонний треугольник ABC с центром в начале координат.

(а) Опишите геометрически (как повороты, отражения, и т.п.) все движения плоскости, которые переводят треугольник ABC в себя.

(б) Пусть S — отражение относительно оси симметрии треугольника, проходящей через вершину A, а T — поворот против часовой стрелки относительно центра треугольника на угол $\frac{2\pi}{3}$. Опишите геометрически движения ST, T^2 и STS.

(в) Представьте каждое движение из пункта (а) в виде композиции движений S и T.

(г) Найдите матрицы движений из пункта (а) в какой-нибудь системе координат.

(д) Можно ли в пункте (г) выбрать систему координат так, чтобы все матрицы имели целые коэффициенты?

15. В трёхмерном пространстве с координатами (x, y, z) найдите матрицу поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x = y = z\}$.

3. Векторные пространства

В задачах этого раздела используется аксиоматическое определение вещественного векторного пространства. Краткая версия определения приводится ниже, полную версию можно найти в [Ar, гл. 2, §1; гл. 3, §1] или [B, гл. 1, SS2, 7])

Для запоминания. В вещественном (скаляры = вещественные числа) векторном пространстве

(1) векторы образуют абелеву группу по сложению;
(2) умножение вектора на скаляр ассоциативно: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;
(3) умножение вектора на вещественное число 1 — это тождественное преобразование: $1v = v$;
(4) умножение вектора на скаляр дистрибутивно и относительно сложения скаляров, и относительно сложения векторов:

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v; \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

Из аксиоматического определения нельзя понять ни что такое векторное пространство, ни что такое вектор (предполагается, что у нас уже есть интуитивное представление об этих понятиях, основанное на личном опыте работы со школьной плоскостью и трёхмерным пространством). Зато из аксиом можно строго логически выводить теоремы, и эти теоремы будут верны для всех векторных пространств без исключения, какими бы экзотическими они ни были. Сейчас мы будем доказывать теоремы, а попутно знакомиться с полезными и интересными примерами векторных пространств.

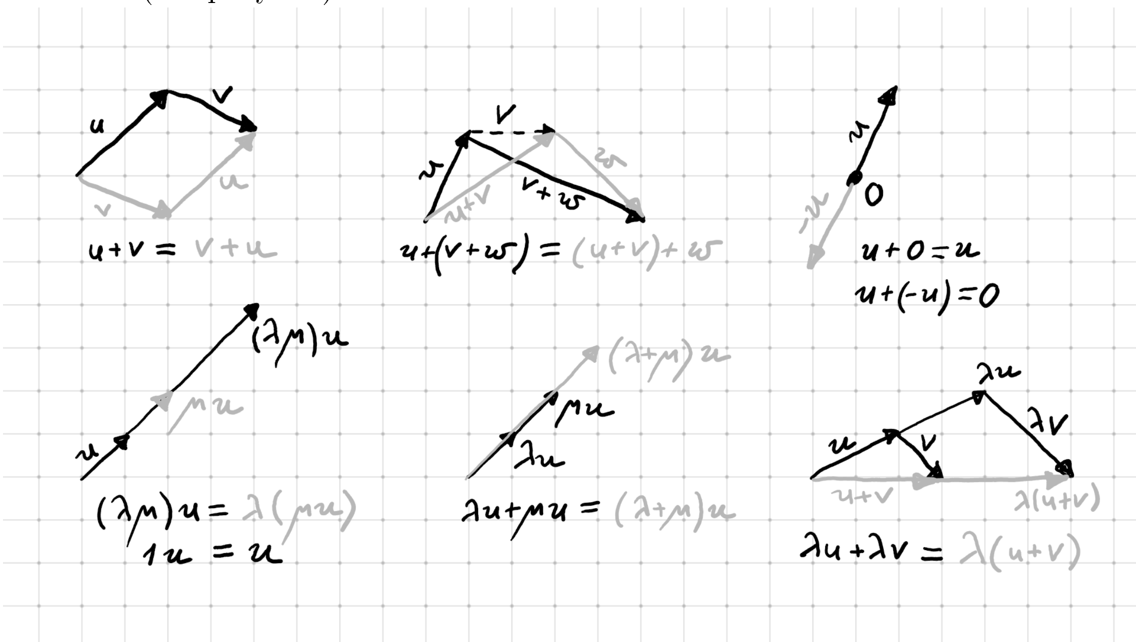
16. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ — множество всех упорядоченных пар (x_1, x_2) вещественных чисел. Зададим на V структуру вещественного векторного пространства:

- $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ (сложение векторов);
- $\lambda(u_1, u_2) := (\lambda u_1, \lambda u_2)$ (умножение вектора на скаляр).

Проверьте, что V удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства.

Решение. Заметим, что упорядоченную пару (u_1, u_2) можно интерпретировать как координаты направленного отрезка u (= школьного вектора) на плоскости с координатами (x_1, x_2). Проверьте, что сложение школьных векторов u и v по правилу треугольника соответствует покоординатному сложению, то есть $w = u + v$ тогда и только тогда, когда $(w_1, w_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$.[2] Умножение школьных векторов на скаляр λ (= вещественное число λ) — это гомотетия с коэффициентом λ.

Геометрическая интерпретация сложения векторов и умножения вектора на скаляр позволяет нам наглядно убедиться, что все аксиомы векторного пространства выполнены (см. рисунок).



Что впрочем не означает, что эти аксиомы легко вывести строго логически из свойств школьной плоскости. Например, аксиома дистрибутивности

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

эквивалентна теореме о пропорциональных отрезках. Доказать последнюю не так-то непросто (см. [Ш]).

Другое решение. Выведем все аксиомы векторного пространства из свойств вещественных чисел. Поскольку $(u_1, u_2) = (u_1', u_2')$ тогда и только тогда, когда $u_1 = u_1'$ и $v_1 = v_1'$, все тождества можно проверять для первой и второй координаты по отдельности. Поэтому ниже индекс i пробегает два значения: 1 и 2.

(1) (a) $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (v_1, v_2) + (u_1, u_2)$, потому что $u_i + v_i = v_i + u_i$ (*сложение вещественных чисел коммутативно*);
   (b) $((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2) = (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2))$, потому что $(u_i+v_i)+w_i = u_i+(v_i+w_i)$ (*сложение вещественных чисел ассоциативно*);
   (c) существует нулевой вектор $(0, 0)$, потому что $v_i + 0 = v_i$ (*свойство вещественного числа* 0);
   (d) для кажого вектора (v_1, v_2) существует обратный ему вектор $(-v_1, -v_2)$, потому что $v_i + (-v_i) = 0$ (*существование противоположного числа*);

(2) $(\lambda\mu)(v_1, v_2) = \lambda(\mu(v_1, v_2))$, потому что $(\lambda\mu)v_i = \lambda(\mu v_i)$ (*умножение вещественных чисел ассоциативно*);

[2] Это очень важный факт! Алгебраическое сложение векторов совпадает с геометрическим.

(3) $1(v_1, v_2) = (v_1, v_2))$, потому что $1 \cdot v_i = v_i$ (*свойство вещественного числа* 1);

(4) (a) $(\lambda + \mu)(v_1, v_2) = \lambda(v_1, v_2) + \mu(v_1, v_2)$, потому что $(\lambda + \mu)v_i = \lambda v_i + \mu v_i$ (*дистрибутивность вещественных чисел*);

(b) $\lambda((u_1, u_2)+(v_1+v_2)) = \lambda(u_1, u_2)+\lambda(v_1, v_2)$, потому что $\lambda(u_i+v_i) = \lambda u_i+\lambda v_i$ (*дистрибутивность вещественных чисел*).

Заметим, что во втором решении нам не пришлось напрягаться — решение свелось к формальному сравнению аксиом векторного пространства и свойств вещественных чисел. Нам не понадобилась теорема о пропорциональных отрезках. Однако свойства вещественных чисел тоже нелегко обосновать в рамках школьной геометрии. Например, попробуйте определить геометрически умножение вектора на $\sqrt{2}$ или на π. Так что во втором решении мы просто замели под ковёр сложности, связанные с понятием вещественного числа. Строгое построение вещественных чисел с доказательством всех их свойств выходит за рамки линейной алгебры и обычно проводится в курсе анализа.

17. Определите векторное пространство $\mathbb{R}^n$ для каждого натурального n.

Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ называется *координатным векторным пространством размерности* n. Его векторы по самой своей природе являются наборами вещественных чисел. Как мы позже выясним, векторы в абстрактном векторном пространстве тоже можно задавать наборами чисел (*координатами*). В конкретных задачах важно научиться выбирать координаты так, чтобы уменьшить объём вычислений.

18. Пусть V — множество всех квадратных трёхчленов, то есть таких функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x) = ax^2 + bx + c$ (коэффициенты a, b и c — вещественные константы). Зададим на V структуру вещественного векторного пространства:

(1) $(u + v)(x) := u(x) + v(x)$ (сложение векторов);

(2) $(\lambda u)(x) := \lambda u(x)$ (умножение вектора на скаляр).

(а) Проверьте, что V удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства.

(б) Найдите такой квадратный трёхчлен f, что

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 20, \quad f(3) = 200.$$

Решение. (а) Сопоставим квадратному трёхчлену $f(x) = ax^2 + bx + c$ тройку чисел $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Легко проверить, что при таком сопоставлении сумме трёхчленов соответствует сумма векторов в $\mathbb{R}^3$, а умножению трёхчлена на скаляр соответствует умножение вектора в $\mathbb{R}^3$ на скаляр. Таким образом, мы можем отождествить V и $\mathbb{R}^3$ с сохранением всех операций. Тем самым, все аксиомы векторного пространства выполняются в V, поскольку они выполняются в $\mathbb{R}^3$.

(б) Будем искать неизвестные коэффициенты a, b и c, подставляя в тождество $f(x) = ax^2 + bx + c$ значения $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. Получим три линейных уравнения на три неизвестных:

$$a + b + c = 2; \quad 4a + 2b + c = 20; \quad 9a + 3b + c = 200.$$

Мы пока не изучили высокотехнологичных методов решения систем линейных уравнений, но идея последовательного исключения переменных сработает здесь и без всякой техники. Вычтем из второго и третьего уравнения первое, чтобы избавиться от переменной c. Получим эквивалентную (то есть с тем же множеством решений) систему:

$$a + b + c = 2; \quad 3a + b = 18; \quad 8a + 2b = 198.$$

Теперь поделим все коэффициенты в третьем уравнении пополам и вычтем из результата второе уравнение, чтобы избавиться от переменной b:

$$a+b+c=2; \quad 3a+b=18; \quad a=81.$$

Мы нашли $a=81$, теперь можно найти $b=-225$ из второго уравнения, и $c=146$ из третьего уравнения.

Оказывается, решение в пункте (б) не самое оптимальное. Есть более короткое решение (интерполяционная формула Лагранжа), основанное на другом выборе отождествления векторных пространств V и $\mathbb{R}^3$.

Другое решение. (а) Попробуем отождествить V и $\mathbb{R}^3$ так, чтобы проще было решить пункт (б). Сначала решим три вспомогательных задачи. Найдём такой трёхчлен f_1, что $f_1(1)=1$ и $f_1(2)=f_1(3)=0$. Поскольку 2 и 3 — корни трёхчлена f, получаем тождество $f(x)=a(x-2)(x-3)$. Подставляя в обе части $x=1$, находим $a=\frac{1}{2}$. Аналогичным образом найдём такой трёхчлен f_2, что $f_2(2)=1$ и $f_2(1)=f_1(3)=0$, и такой трёхчлен f_3, что $f_3(3)=1$ и $f_3(1)=f_3(2)=0$. Получим

$$f_1=\frac{1}{2}(x-2)(x-3); \quad f_2=-(x-1)(x-3); \quad f_3=\frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

Теперь отождествим V и $\mathbb{R}^3$ таким образом: сопоставим трёхчлену $f(x)$ тройку чисел $(f(1),f(2),f(3))\in\mathbb{R}^3$. Проверим, что это взаимно-однозначное соответствие.

Действительно, если два трёхчлена f и g перешли в одну и ту же тройку, то $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$, $f(3)=g(3)$. Поэтому у трёхчлена $f-g$ будет три попарно различных корня: $x=1$, $x=2$, $x=3$. Следовательно, $f-g=0$,[3] то есть $f=g$. С другой стороны, любую тройку $(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$ можно представить как $(f(1),f(2),f(3))$. Достаточно взять $f(x)=u_1f_1(x)+u_2f_2(x)+u_3f_3(x)$.

Проверьте, что соответствие $f\mapsto(f(1),f(2),f(3))$ между V и $\mathbb{R}^3$ согласовано с операциями сложения векторов и умножения на скаляр.

(б) После артподготовки, проведённой в пункте (а), пункт (б) решается в одну строчку:

$$f(x)=2\cdot\frac{1}{2}(x-2)(x-3)+20\cdot(-(x-1)(x-3))+200\cdot\frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

Отсюда мораль: на одном и том же векторном пространстве полезно рассматривать разные координаты, то есть разные отождествления между абстрактным векторным пространством и координатным пространством $\mathbb{R}^n$.

19 (Единственность нулевого вектора)**.** Докажите, что в векторном пространстве не может быть двух различных нулевых векторов.

Решение. Пусть 0_1 и 0_2 — два нулевых вектора (возможно различных, а возможно одинаковых). Мы хотим доказать, что $0_1=0_2$. Вычислим сумму 0_1+0_2 двумя способами.

(1) $0_1+0_2=0_2$, потому что 0_1 — нулевой вектор.
(2) $0_1+0_2=0_1$, потому что 0_2 — нулевой вектор.

Отсюда получаем $0_1=0_1+0_2=0_2$, что и требовалось доказать.

20 (Единственность обратного вектора)**.** Докажите, что у каждого вектора в векторном пространстве есть ровно один обратный вектор.

[3] Здесь мы воспользовались важным фактом: если у многочлена степени n есть $n+1$ попарно различных корней, то многочлен тождественно равен нулю. Если вы раньше не сталкивались с таким фактом, то обязательно подумайте, как его объяснить.

21. Студент Вася на лекции переписал с доски две теоремы о векторных пространствах:

(1) $0v = 0$;
(2) $\lambda 0 = 0$.

Чтобы различить $0_{\mathbb{R}}$ (вещественное число 0) и 0_V (нулевой вектор), лектор использовала цветные мелки, но при переписывании цвета не сохранились.

(а) Помогите Васе восстановить строгие формулировки обеих теорем.
(б) Докажите сформулированные вами в пункте (а) теоремы.

22. Пусть $V = \mathbb{R}^+$ — множество всех строго положительных вещественных чисел. Попробуем задать на V структуру вещественного векторного пространства:

- $u \boxplus v := uv$ (сложение векторов);
- $\lambda \odot u := u^\lambda$ (умножение вектора на скаляр).

(а) Вычислите $(\lambda \odot u) \boxplus (\mu \odot v) \boxplus (\nu \odot w)$ для $\lambda = \mu = -1$, $\nu = 2$, $u = 2$, $v = w = 3$.
(б) Все ли аксиомы векторного пространства выполняются в V?
(в) Придумайте линейное отображение $T : V \to \mathbb{R}$, которое является биекцией.

23. Докажите, что в каждом вещественном векторном пространстве V для всех векторов $v \in V$ выполнено тождество:

$$(-1)v = -v.$$

(Если вам кажется, что тут нечего доказывать, то запишите формулировку теоремы в частном случае: для векторного пространства из предыдущей задачи. Какую формулу из школьной алгебры вы получили, и в каком классе эту формулу проходят?)

Решение. Эта формула обобщает сразу две формулы из школьной алгебры:

$$(-1) \cdot a = -a;$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

для всех вещественных чисел a. Первую формулу проходят в 5-ом классе, вторую — в 8-ом. Некоторых школьников эти формулы удивляют, а некоторым кажутся самоочевидными. Например, прямое следствие первой формулы — знаменитое тождество $(-1)(-1) = 1$, в которое не все верят, когда первый раз видят.

Мы не будем разбираться, верны ли эти формулы “на самом деле” (что бы это ни значило). Это вопрос философский. Мы докажем лишь, что если верны аксиомы векторного пространства, то верна формула

$$(-1)v = -v.$$

Сначала докажем равенсто $v + (-1)v = 0_V$. Действительно,

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0_{\mathbb{R}}v = 0_V.$$

В этой цепочке тождеств мы использовали аксиомы (какие именно?) и утверждение, которое мы ещё раньше вывели из аксиом. А именно, утверждение $0_{\mathbb{R}}v = 0_V$ (доказанное в задаче 21).

Далее, из равенства $v + (-1)v = 0_V$ следует, что v и $(-1)v$ обратны относительно сложения. Поэтому $(-1)v = -v$ (здесь мы пользуемся доказанной в задаче 20 единственностью обратного вектора).

24. Пусть V — множество всех бесконечных последовательностей вещественных чисел.

(а) Задайте на V структуру вещественного векторного пространства.

(б) Приведите пример линейного отображения $T : V \to V$, которое является инъекцией, но не является сюръекцией.

(в) Приведите пример сюръективного, но не инъективного линейного отображения $T : V \to V$.

Решение. (а) По аналогии со сложением векторов-строк и векторов-столбцов определим сумму последовательностей $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$ и $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ как

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots).$$

Определим умножение вектора u на скаляр λ как

$$\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \ldots).$$

Проверка аксиом векторного пространства для таких операций ничем не отличается от покоординатной проверки во втором решении задачи 16.

(б) Определим отображение правого сдвига

$$R : (u_1, u_2, u_3, \ldots) \mapsto (0, u_1, u_2, u_3, \ldots).$$

Это отображение переводит разные последовательности в разные (то есть инъективно). При этом R не сюръективно, так как последовательность $(1, 1, 1, \ldots)$ нельзя получить правым сдвигом ни из какой последовательности.

(в) Определим отображение левого сдвига

$$L : (u_1, u_2, u_3, \ldots) \mapsto (u_2, u_3, u_4, \ldots).$$

Это отображение сюръективно, так как каждую последовательность u можно получить левым сдвигом из последовательности $R(u)$. Иными словами, правый сдвиг R обратен справа левому сдвигу L, то есть композиция $L \circ R$ является тождественным преобразованием пространства V. При этом L не инъективно, так как последовательности $(1, 0, 0, \ldots)$ и $(0, 0, 0, \ldots)$ (= нулевой вектор) переходят в одну и ту же последовательность.

В решении существенно использовалась бесконечномерность пространства последовательностей, то есть бесконечность набора чисел-координат, задающих последовательность. Это неспроста. Позднее мы докажем, что каждое инъективное линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сюръективно (а каждое сюръективное линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя — инъективно). Дело здесь обстоит примерно так же, как и в случае конечных и бесконечных множеств. Если множество X конечно, то отображение $f : X \to X$ инъективно тогда и только тогда, когда f сюръективно. Для бесконечных множеств это неверно (отель Гильберта — один из контрпримеров). В примере с последовательностями мы фактически воспользовались примерами инъективного, но не сюръективного, и сюръективного, но не инъективного отображений из множества натуральных чисел в себя.

25. Пусть X — произвольное множество. Обозначим через V множество всех отображений $f : X \to \mathbb{R}$.

(а) Задайте на V структуру вещественного векторного пространства.

(б) Покажите, что в случае, когда X конечно, векторное пространство V можно отождествить с $\mathbb{R}^n$ для некоторого натурального числа n. Как связаны n и X?

(в) Покажите, что в случае, когда X счётно, векторное пространство V можно отождествить с пространством всех вещественных последовательностей из предыдущей задачи.

26. Пусть V — множество единичных векторов на плоскости. Определим сложение векторов в V следующим образом. Если векторы u и $v \in V$ образуют углы φ и ψ, соответственно, с осью x, то их сумма $u \boxplus v$ — это единичный вектор, образующий угол $\varphi + \psi$ с осью x.

(а) Проверьте, что векторы образуют абелеву группу относительно операции $\boxplus$.

(б) Можно ли дополнить операцию $\boxplus$ сложения векторов на V какой-нибудь операцией $\odot$ умножения на скаляр так, чтобы V стало вещественным векторным пространством?

Решение. (б) Пусть v — вектор, образующий угол π с осью x. Тогда $v \neq 0$, зато $v + v = 0$. Как бы мы ни определили умножение на скаляр, из аксиом векторного пространства следует, что

$$v + v = 1v + 1v = (1 + 1)v = 2v.$$

Поэтому $2v = 0$. С другой стороны, из аксиом следует также, что

$$v = 1v = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) v = \frac{1}{2}(2v).$$

Получаем, что $v = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$. Противоречие с тем, что $v \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что V никак нельзя дополнить операцией умножения на скаляр так, чтобы выполнялись все аксиомы вещественного векторного пространства.

27. Пусть V — множество единичных векторов на плоскости. Можно ли ввести на V структуру вещественного векторного пространства?

Решение. Это задача не про векторные пространства, а про равномощные множества. Можно построить биекцию f между окружностью S (= множество единичных векторов на плоскости) и вещественной прямой $\mathbb{R}$. На вещественной прямой есть структура векторного пространства. Эту структуру можно перенести на S с помощью биекции $f : S \to \mathbb{R}$:

$$u + v := f^{-1}(f(u) + f(v));$$

$$\lambda u := f^{-1}(\lambda f(u)).$$

Кстати, векторное пространсто в задаче 22 было сгенерировано похожим образом — с помощью биекции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \ln(x)$ (тогда $f^{-1}(x) = e^x$).

Геометрического смысла в предыдущей задаче нет, зато видна сила абстрактных определений. Каждое множество мощности континуум можно превратить в вещественное векторное пространство (в частности, вектором может стать объект практически любой природы). Однако нас будут в первую очередь интересовать такие векторные пространства, в которых сложение векторов и умножение вектора на скаляр определены более естественным образом. Вещественные числа, векторы-столбцы, многочлены, последовательности и функции дают естественные примеры векторных пространств, а положительные вещественные числа и единичные векторы — менее естественные.

4. Линейные отображения

Линейные отображения между векторными пространствами — это математическая реализация простейших (или сознательно упрощённых) преобразований, которые приходят из физических задач. Например, тело движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют никакие силы. Даже если силы действуют (например, сила тяготения), то в первом приближении движение тела по криволинейной траектории (например, по параболе) хорошо описывается с помощью движения по прямой, которая касается траектории. Линейные отображения важны для понимания курсов математического анализа и дифференциальных уравнений.

Пусть U и V — вещественные векторные пространства. Отображение $T : U \to V$ называется линейным, если во-первых, для любой пары векторов u_1 и u_2 из U выполнено тождество:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2),$$

а во-вторых, для любого вектора $u \in U$ и скаляра λ выполнено тождество

$$T(\lambda u) = \lambda T(u).$$

Научно выражаясь, T коммутируют с операциями сложения в U и V, и с операциями умножения на скаляр.

28. Пусть U и V — векторные пространства, а $T : U \to V$ — линейное отображение. Докажите, что $T(0) = 0$.

29. Пусть V — векторное пространство квадратных трёхчленов из задачи 2. Какие из следующих отображений $T : V \to V$ являются линейными?

(а) $[T(f)](x) = f(x) + 2$; (б) $[T(f)](x) = f(x + 2)$; (в) $[T(f)](x) = f(x) + x$;

(г) $[T(f)](x) = f(2x)$; (д) $[T(f)](x) = f(2x + 1)$.

Для запоминания. Отображение $T : V \to W$ между двумя вещественными векторными пространствами является линейным тогда и только тогда, когда

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \ldots + \lambda_\ell T(v_\ell)$$

для любого набора векторов $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_\ell \in V$ и любого набора скаляров $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_\ell \in \mathbb{R}$.

30. Докажите вышеприведённую теорему по индукции.

Повороты и отражения на школьной плоскости задают линейные отображения, если сохраняют начало координат. Вообще, любое движение (то есть преобразование, сохраняющее расстояния) плоскости или пространства, сохраняющее начало координат, является линейным преобразованием. В самом деле, если векторы u_1 и u_2 перешли в векторы $T(u_1)$ и $T(u_2)$, то параллелограмм, натянутый на векторы u_1 и u_2, должен перейти в параллелограмм, натянутый на $T(u_1)$ и $T(u_2)$ (тут мы используем, что движение переводит каждый треугольник в равный ему треугольник). Поэтому $u_1 + u_2$ перейдёт в $T(u_1) + T(u_2)$. Попробуйте сами доказать, что выполняется и свойство $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, в частности, движение переводит прямые в прямые (тут пригодится неравенство треугольника).

31. Веб-дизайнер Петя преобразовал квадрат с помощью такого CSS кода:

```
rotate(-45deg) scale(2, 3) rotate(45deg)
```

(на русском языке это означает, что сначала квадрат повернули на 45° против часовой стрелки относительно начала координат, потом результат растянули по оси x в два раза, а по оси y — в три раза, и наконец повернули на 45° по часовой стрелке тоже относительно начала координат).

(а) Нарисуйте образ квадрата при Петином преобразовании.[4]

(б) Проверьте, что Петино преобразование линейно.

(в) Помогите Пете записать его преобразование в матричной форме:

```
matrix(a,b,c,d,0,0)
```

(то есть найдите такие константы a, b, c и d, что (x, y) преобразуется в $(ax+by, cx+dy)$ для всех пар (x, y) вещественных чисел).

32. Постройте графики отображений:

(а) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad T : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2.$

(б) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad T : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2.$

(в) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad T : t \mapsto (t, t).$

(г) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad T : t \mapsto (t, t^2).$

Какие из этих отображений являются линейными?

33. Классифицируйте все линейные отображения из прямой в другую прямую, из плоскости в прямую, из прямой в плоскость, из плоскости в другую плоскость, из трёхмерного пространства в плоскость и из плоскости в трёхмерное пространство.

34. Дано линейное отображение $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Известно, что

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Найдите такую матрицу A, что для любого вектора $X \in \mathbb{R}^3$ и его образа $Y = T(X)$ выполнено матричное тождество: $AX = Y$.

35. (а) Докажите, что каждое линейное отображение трёхмерного пространства в себя переводит прямую либо в прямую, либо в нулевой вектор.

(б) Дайте определение прямой в произвольном векторном пространстве и обобщите утверждение пункта (а).

Цель следующих шести задач — классификация движений школьной плоскости. Нас будут интересовать все движения, не обязательно сохраняющие начало координат.

36. Докажите, что каждое движение плоскости M однозначно определяется образами $M(A)$, $M(B)$, $M(C)$ трёх попарно различных точек A, B и C.

37. (а) Докажите, что каждое движение плоскости можно представить в виде композиции одного, двух или трёх отражений.

(б) Покажите, что композиция чётного числа отражений сохраняет ориентацию плоскости (то есть переводит букву “Г” в букву “Г”), а композиция нечётного числа отражений меняет ориентацию (то есть переводит букву “Г” в букву “L”).

38. (а) Докажите, что композиция двух отражений — это либо поворот, либо параллельный перенос.

[4] Можете себя проверить здесь HTTPS://WWW.W3SCHOOLS.COM/CSS/CSS3_2DTRANSFORMS.ASP

(б) Докажите, что каждый поворот можно представить в виде композиции двух отражений.

(в) Докажите, что каждый параллельный перенос можно представить в виде композиции двух отражений.

39 (Теорема Шаля)**.** Каждое собственное (= сохраняющее ориентацию) движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос. Докажите!

40. Из теоремы Шаля следует, что композиция двух поворотов — это либо поворот, либо параллельный перенос. Пусть R_1 — это поворот на угол α вокруг точки A, а R_2 — поворот на угол β вокруг точки B.

(а) При каких условиях на α, β, A и B композиция $R_1 \circ R_2$ окажется параллельным переносом? На какой вектор?

(б) Постройте центр и угол поворота $R_1 \circ R_2$, если это поворот.

41. Докажите, что каждое несобственное движение плоскости — это либо отражение, либо скользящая симметрия.

42 ($\star$)**.** Линейное отображение $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задано формулой:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Является ли T движением пространства? Если является, то опишите T геометрически (вращение, отражение,…).

Список литературы

[Ar] M. Artin, *Algebra*, Pearson, 2011
[В] Э.Б. Винберг, *Курс алгебры*, МЦНМО, 2019
[Ш] А. Шень, *О “математической строгости” и школьном курсе математики*, МЦНМО, 2006
[Геометрия] А. Шень, *Геометрия в задачах*, МЦНМО, 2017