Геометрия, 1-й модуль 2020 г.

Семинары 11-12. Подпространства и уравнения

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть U_1 и U_2 — два конечномерных подпространства в векторном пространстве V.

(а) Покажите, что $U_1 \cap U_2$ — тоже подпространство.

(б) Покажите, что $U_1 \cup U_2$ — подпространство только в том случае, если $U_1 \subset U_2$ или $U_2 \subset U_1$.

(в) Обозначим через $U_1 + U_2$ линейную оболочку подпространств U_1 и U_2, то есть подпространство, порождённое всеми векторами из $U_1 \cup U_2$. Докажите, что

$$\dim(U_1 + U_2) \leq \dim U_1 + \dim U_2.$$

Задача 2. Пусть $U_1 \subset \mathbb{R}^3$ — подпространство, натянутое на строки матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(а) Найдите размерность подпространства U_1.

(б) Покажите, что U_1 можно задать, как множество решений линейного уравнения. Какого?

(в) Пусть $U_2 \subset \mathbb{R}^3$ — подпространство размерности d (где $d = 0$, 1, 2 или 3). Чему может быть равна размерность подпространств $U_1 \cap U_2$ и $U_1 + U_2$ (ответ зависит от d)?

Задача 3. (а) Докажите, что для каждой пары подпространств U и V в векторном пространстве выполнено тождество, аналогичное формуле включений-исключений для множеств:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

(б) Верно ли аналогичное тождество для трёх подпространств?

Для запоминания. Если A — это $m \times n$ матрица ранга r, то пространство решений системы уравнений $AX = 0$ является подпространством в $\mathbb{R}^n$ размерности $(n - r)$.

Задача 4. Подпространство $U_1 \subset \mathbb{R}^4$ натянуто на строки матрицы A_1, а подпространство $U_2 \subset \mathbb{R}^4$ — на строки матрицы A_2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(а) Найдите размерности подпространств U_1 и U_2.

(б) Задайте U_1 и U_2 уравнениями (то есть для каждого $i = 1$, 2 найдите такую матрицу B_i, что U_i является пространством решений системы $B_i X = 0$).

(в) Найдите размерности подпространств $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$.

Задача 5. В последовательности чисел a_1, a_2, …, a_n каждый член, кроме первого и последнего, является средним арифметическим двух соседних членов. Можно ли восстановить числа a_2,…, a_{n-1} по числам a_1 и a_n?

Задача 6. В вершинах n-угольника написаны числа $b_1, \ldots, b_n$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё n чисел на рёбра так, чтобы число в каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на двух сходящихся в этой вершине рёбрах? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_n$, для которых задача имеет решения при

(а) $n = 3$; (б) $n = 4$ (в) произвольном n.

Задача 7. На ребрах тетраэдра написаны числа $b_1, \ldots, b_6$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_6$, для которых задача имеет решения.

Задача 8. В десяти копилках лежат $1, 2, 3, \ldots, 10$ монет. Разрешается добавлять по монете во все копилки, кроме одной. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, получить во всех копилках одинаковое количество монет?

Задача 9. Клетки прямоугольной таблицы заполнены числами так, что каждое число является средним арифметическим чисел в четырёх соседних клетках (соседние=имеющие общую сторону). Можно ли восстановить числа во внутренних клетках таблицы по числам в граничных клетках?

Задача 10. (а) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров другого стада. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если убрать условие, что вес коровы — целое число?

(в) Найдите ранг $(2n+1) \times (2n+1)$ матрицы, у которой на диагонали стоят нули, а все остальные коэффициенты равны либо 1, либо -1, причём сумма коэффициентов в каждой строке равна нулю.