Геометрия, 1-й модуль 2020 г.

# Семинары 9-10. Метод Гаусса

факультет математики, НИУ ВШЭ

В задачах используется алгоритм (метод Гаусса) приведения матрицы к ступенчатой форме элементарными преобразованиями строк.

**Задача 1.** Какие из следующих систем линейных уравнений эквивалентны (то есть имеют одинаковые множества решений)?

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x+5y+2z=3 \\ x+y=-1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 4x+7y+3z=5 \\ y+z=3 \end{cases} .$$

**Для запоминания.** Система из $m$ линейных уравнений на $n$ неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ записывается в матричной форме как $AX=B$, где $A$ — это $m \times n$ матрица (матрица коэффициентов), $B$ — столбец $m \times 1$ (столбец правых частей), и $X$ — столбец $n \times 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** (а) В трёхмерном пространстве с координатами $(x, y, z)$ даны три плоскости:

$$\Pi_1 = \{3x+2y+z=39\}, \quad \Pi_2 = \{2x+3y+z=34\}, \quad \Pi_3 = \{x+2y+3z=26\}.$$

Найдите их пересечение $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

(б) Пусть $AX=B$ — система уравнений, задающая пересечение трёх плоскостей в трёхмерном пространстве. Для каждого комбинаторного типа ступенчатой формы матрицы $A$ опишите геометрически (точка, прямая,...) множество решений системы $AX=B$ (ответ будет зависеть также и от $B$).

**Задача 3.** Приведите матрицу $A$ к ступенчатой форме методом Гаусса:

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

(в) Опишите все решения системы $AX=0$.

(г) Для каких столбцов $B$ система $AX=B$ имеет решение?

**Задача 4.** (а) Найдите линейную зависимость между столбцами матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}.$$

(б) Многочлен $f(x)$ степени не выше три принимает в точках 1, 2, 3 и 4 значения $y_1$, $y_2$, $y_3$ и $y_4$, соответственно. Найдите $f(5)$. Подсказка: если $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, то справедливо матричное тождество (с матрицей $A$ из пункта (а):

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \end{pmatrix}.$$

**Задача 5.** Существуют ли такая $2 \times 3$ матрица $A$ и такая $3 \times 2$ матрица $B$, что

$$\text{(а) } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(в) } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** Пусть $M$ — "таблица умножения", то есть матрица $10 \times 10$, у которой на пересечении $i$-той строки и $j$-того столбца стоит произведение $i \cdot j$. Найдите размерность подпространства в $\mathbb{R}^n$, натянутого на столбцы матрицы $M$. (Эта размерность называется *рангом* матрицы и обозначается $\mathrm{rk}(M)$.)

**Задача 7.** Найдите ранги матриц из задач 3 и 4.

**Задача 8.** Пусть $A$ и $B$ две матрицы одинакового размера. Докажите неравенство на ранги:

$$\mathrm{rk}(A + B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B).$$

**Задача 9.** (а) Обозначим через $E_{ij}$ квадратную матрицу $m \times m$ , у которой на пересечении $i$-той строки и $j$-того столбца стоит 1, а все остальные коэффициенты равны 0. Через $I = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{mm}$ обозначим единичную $m \times m$ матрицу. Докажите, что если $m \times n$-матрица $A'$ получается из матрицы $A$ заменой $i$-той строки на сумму $i$-той строки и $j$-той строки, умноженной на $a$, то $A' = (I + aE_{ij})A$.

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для остальных элементарных преобразований строк.

**Задача 10.** Разложите матрицу $A$ в произведение матриц вида $I + aE_{ij}$ и диагональных матриц. Как это помогает найти обратную матрицу по умножению, то есть такую матрицу $A^{-1}$, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$?

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

(в) Обоснуйте следующий алгоритм поиска обратной матрицы $A^{-1}$ для матрицы $A$ размера $n \times n$:

(1) Припишем к матрице $A$ справа единичную матрицу $I$ того же порядка. Получим матрицу $B$ размера $n \times 2n$.

(2) Матрицу $B$ приведём элементарными преобразованиями строк к ступенчатой форме $B_1$.

(3) Если все ведущие единицы матрицы $B_1$ оказались в левой половине матрицы, то дополнительно приведём матрицу $B_1$ к *стандартной* ступенчатой форме $B_2$ (то есть левая половина матрицы $B_2$ будет равна единичной матрице $I$). Тогда правая половина матрицы $B_2$ совпадёт с искомой матрицей $A^{-1}$.

(4) Если хотя бы одна ведущая единица матрицы $B_1$ оказалась в правой половине матрицы, то исходная матрица $A$ необратима.

**Задача 11.** При каком условии на коэффициенты $2 \times 2$ матрица имеет обратную относительно умножения? Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы $A^{-1}$, если

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$