

Домашнее задание 4. Срок сдачи 18 ноября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

**Задача 1.** Вычислите ориентированный объём параллелепипеда в  $\mathbb{R}^4$ , натянутого на векторы  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $(1, 4, 9, 16)$ ,  $(1, 8, 27, 64)$ .

**Задача 2.** Пусть  $V$  — минимальное по включению подполе поля  $\mathbb{R}$ , содержащее  $\sqrt[3]{2}$ . Будем рассматривать  $V$  как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$ .

(а) Постройте базис в  $V$ .

(б) Определим отображение  $T : V \rightarrow V$  формулой:

$$T(v) = \sqrt[3]{2} \cdot v,$$

где в правой части  $\cdot$  обозначает операцию умножения на вещественных числах. Проверьте, что  $T$  линейно и выпишите его матрицу в базисе из пункта (а).

**Задача 3.** Покажите, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

является квадратом многочлена от  $a, b, c$  и  $d$ .

**Задача 4.** Для каких простых чисел  $p \in \mathbb{N}$  система сравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 0 \pmod{p} \\ 2x + 3y + z \equiv 0 \pmod{p} \\ 3x + y + 2z \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

имеет ненулевое (по модулю  $p$ ) решение?

**Задача 5.** Вычислите определитель  $n \times n$  матрицы, у которой на диагонали стоят числа  $1 + \mu_1, \dots, 1 + \mu_n$ , а вне диагонали — единицы.