Геометрия, 1-й модуль 2020 г.

Семинар 13. Поля и подполя

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Обозначим через $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ множество всех вещественных чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональны. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ — подполе поля вещественных чисел.

Задача 2. (а) Прямые AB и CD на вещественной плоскости пересекаются в точке M. Докажите, что если точки A, B, C и D рациональны (то есть имеют рациональные координаты), то и точка M рациональна.

(б) Приведите пример такой прямой на вещественной плоскости, которая не содержит ни одной рациональной точки. Может ли прямая содержать ровно одну рациональную точку? А ровно две рациональных точки?

(в) Покажите, что если прямая в трёхмерном вещественном пространстве содержит две различных рациональных точки, то она содержит бесконечно много рациональных точек.

(г) Две плоскости в трёхмерном вещественном пространстве пересекаются по прямой l. Известно, что на каждой плоскости лежит бесконечно много рациональных точек. Верно ли, что на прямой l найдётся рациональная точка?

Задача 3. Какие из следующих подмножеств поля $\mathbb{R}$ являются подполями?

$$\text{(а) } \{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}; \quad \text{(б) } \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} \mid a,b,c\in\mathbb{Q}\};$$
$$\text{(в) } \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}; \quad \text{(г) } \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mid a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}.$$

Задача 4. (а) Покажите, что все подмножества поля $\mathbb{R}$, определённые в предыдущей задаче, являются векторными пространствами над полем рациональных чисел, если определить сложение векторов как сложение вещественных чисел, а умножение на скаляр $\lambda\in\mathbb{Q}$ — как умножение на вещественное число λ.

(б) Постройте базис в каждом из векторных пространств из пункта (а) и найдите размерность.

Задача 5. Отождествим поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ с вещественной плоскостью: числу $a+bi$ сопоставим точку с координатами (a,b). Нарисуйте все комплексные корни уравнения:

$$\text{(а) } x^4-1=0; \quad \text{(б) } x^3+1=0; \quad \text{(в) } x^3-2=0; \quad \text{(г) } x^4+4=0; \quad \text{(д) } x^5-1=0.$$

Задача 6. Пусть $K\subset\mathbb{F}$ — подполе в поле $\mathbb{F}$. Введите на $\mathbb{F}$ структуру векторного пространства над K по аналогии с задачей 4. Обозначим через $\dim_K\mathbb{F}$ размерность векторного пространства $\mathbb{F}$ над полем K. Найдите размерности:

$$\text{(а) } \dim_K K; \quad \text{(б) } \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2}); \quad \text{(в)}^\star\ \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}; \quad \text{(г) } \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}.$$

Для запоминания. Характеристика поля $\mathbb{F}$ — это такое минимальное натуральное число p, что

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p}=0.$$

Если такого числа не существует, то характеристику поля полагают равной нулю.

Задача 7. Обозначим через $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ множество *вычетов по модулю* n, то есть множество классов эквивалентности целых чисел относительно отношения эквивалентности:

$$a \simeq b, \text{ если } a - b \in n\mathbb{Z}.$$

Напомним, что на дискретной математике сложение и умножение в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ определили таким образом:

$$[a] + [b] = [a + b]; \quad [a][b] = [ab].$$

Является ли $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ полем при

(а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) $n = 4$?