Геометрия, 2-й модуль 2020 г.

## Семинары 14-15. Определители и объёмы

факультет математики, НИУ ВШЭ

**Для запоминания.** Определитель det — это функция на множестве всех матриц размера $n \times n$. Значение $\det A$ на матрице $A$ определятся следующими двумя свойствами функции det. Во-первых, $\det A$ — это кососимметрическая $n$-форма от векторов-столбцов матрицы $A$. Во-вторых, $\det I = 1$.

**Задача 1.** (а) Вычислите площадь параллелограмма на плоскости, натянутого на векторы $(13, 21)$ и $(21, 34)$.

(б) Вычислите объём параллелепипеда в трёхмерном пространстве, натянутого на векторы $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 9)$.

**Задача 2.** Пусть $\omega$ — билинейная форма на векторном пространстве $V$ над полем $\mathbb{F}$.

(а) Докажите, что если $\omega(v, v) = 0$ для всех векторов $v \in V$ (то есть $\omega$ — кососимметрическая форма), то $\omega(v_1, v_2) = -\omega(v_2, v_1)$ для всех $v_1$, $v_2 \in V$.

(б) Докажите, что если $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ (то есть характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна двум), то верно и утверждение обратное к утверждению пункта (а).

**Задача 3.** Докажите тождество:

$$\det \begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{pmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

**Задача 4.** Чему равен определитель квадратной матрицы, у которой сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами?

**Задача 5.** (а) Проверьте, что при элементарных преобразованиях столбцов первого типа (то есть $C_i \mapsto C_i + aC_j$) определитель матрицы не меняется, при преобразованиях второго типа (то есть $C_i \mapsto \lambda C_i$) — умножается на $\lambda$, при преобразованиях третьего типа (то есть $C_i \leftrightarrow C_j$) — меняет знак.

(б) Целые числа 1798, 2139, 3255, 4867 делятся на 31. Без всяких вычислений покажите, что определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

также делится на 31.

**Задача 6.** Найдите определитель оператора $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$, если известно, что $T$ переставляет базисные векторы $e_1, \ldots, e_9$ следующим образом:

$$e_1 \xrightarrow{T} e_3 \xrightarrow{T} e_5 \xrightarrow{T} e_7 \xrightarrow{T} e_1; \quad e_2 \xrightarrow{T} e_8 \xrightarrow{T} e_2; \quad e_4 \xrightarrow{T} e_9 \xrightarrow{T} e_6 \xrightarrow{T} e_4.$$

**Задача 7** (Разложение определителя по строке)**.** Пусть $A$ — матрица размера $n\times n$. Обозначим через $a_{ij}$ элемент матрицы $A$, стоящий на пересечении $i$-той строки и $j$-того столбца, а через $A_{ij}$ — матрицу размера $(n-1)\times(n-1)$, полученную из $A$ вычёркиванием $i$-той строки и $j$-того столбца. Докажите формулу:

$$\det(A) = (-1)^{i-1}(a_{i1}\det(A_{i1}) - a_{i2}\det(A_{i2}) + \ldots + (-1)^n a_{in}\det(A_{in}).$$

**Задача 8.** (а) Докажите, что если $A$ — квадратная матрица, то $\det A = \det A^t$. (Через $A^t$ обозначается траспонированная матрица, то есть матрица, полученная из $A$ отражением относительно главной диагонали.)

(б) Докажите, что параллелограмм, натянутый на векторы $(a,b)$ и $(c,d)$ имеет такую же площадь, как и параллелограмм, натянутый на векторы $(a,c)$ и $(b,d)$.

(в) Докажите, что $(AB)^t = B^tA^t$. (Здесь $A$ и $B$ не обязательно квадратные матрицы.)

(г) Докажите, что определитель кососимметрической $n\times n$ матрицы равен нулю при нечётных $n$. (Матрица $A$ кососимметрическая, если $A=-A^t$.)

**Задача 9** (Определитель Вандермонда)**.** Докажите тождество:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

**Задача 10.** Вычислите определитель $n\times n$-матрицы с элементами $a$ на диагонали и $b$ вне неё.

**Задача 11** (Формула для обратной матрицы)**.** Пусть $A$ — матрица размера $n\times n$. *Матрица алгебраических дополнений* $\hat{A}$ — это матрица размера $n\times n$, у которой на пересечении $i$-той строки и $j$-того столбца стоит $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$. Докажите тождество:

$$A\hat{A}^t = (\det A)I$$

(а) при $n=2$; (б) при $n=3$; (в) при произвольном $n$.

**Задача 12.** Пусть $A$ — матрица размера $n\times n$ с целочисленными коэффициентами. При каких условиях на $A$ обратная матрица $A^{-1}$ тоже будет целочисленной?

**Задача 13** ($\star$)**.** Все вершины параллелепипеда в трёхмерном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что строго внутри него есть ровно 9 целочисленных точек. (Объём единичного куба равен единице.)