Геометрия, 2-й модуль 2020 г.

Семинары 16-17. Аффинная геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Элементы аффинного пространства $\mathbb{F}^n$ над полем $\mathbb{F}$ называются точками.

Аффинное подпространство в $\mathbb{F}^n$ можно задать как множество всех точек $X \in \mathbb{F}^n$, удовлетворяющих (не обязательно однородной) системе линейных уравнений $AX = B$, где A — это $m \times n$ матрица, а B — столбец $m \times 1$.

Аффинное отображение $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ можно задать как композицию линейного отображения и параллельного переноса:

$$T(X) = AX + B.$$

Задача 1. Опишите все аффинные подпространства вещественной прямой $\mathbb{R}$ и все аффинные отображения из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Задача 2. Существует ли аффинное преобразование прямой $\mathbb{R}$, переводящее

(а) точки 5, 6, 7 в точки 1, 2, 3, соответственно;

(б) точки 1, 2, 3 в точки -2, -1, -4, соответственно?

Задача 3. Нарисуйте все точки и все прямые в аффинной плоскости над полем из двух элементов.

Задача 4. (а) Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $(2020, 2021)$ и $(-2021, -2020)$ на аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$.

(б) Пересекаются ли прямые $\{(0,0,1)+t(2,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ и $\{(3,3,3)+t(1,2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$?

Задача 5. Аффинное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ переводит точку $(1, 0)$ в $(3, 5)$, а точку $(0, 1)$ в $(5, 6)$.

(а) Найдите образ точки $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ при этом преобразовании.

(б) Куда при этом преобразовании может перейти точка $(0, 0)$?

(в) Найдите образ точки $(2020, -2019)$ при этом преобразовании.

Задача 6. (а) Чему равная композиция двух гомотетий с разными центрами и коэффициентами? (Гомотетией с центром O и коэффициентом λ называется аффинное отображение аффинного пространства в себя, которое точку A переводит в точку $O + \lambda(\overrightarrow{OA})$.)

(б) Докажите теорему Монжа: попарные центры гомотетии трёх окружностей на плоскости лежат на одной прямой.

Задача 7. (а) Дайте определение треугольника на вещественной аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$.

(б) Верно ли, что каждый треугольник на аффинной плоскости можно перевести в любой другой аффинным преобразованием (=обратимым аффинным отображением)?

(в) Используя свойства аффинных преобразований, докажите, что медианы каждого треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 8. Найдите координаты точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ на вещественной аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$. Определите, в каком отношении точка пересечения делит диагонали четырёхугольника:

(а) $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$;

(б) $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 7)$, $D = (0, 1)$.

Задача 9. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ при

(а) $A = (1, 0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 1, 0)$;

(б) $A = (1, 0, 0, 0)$, $B = (3, 3, 2, 5)$, $C = (2, 0, 1, 9)$.

Задача 10. Найдите координаты центра тяжести тетраэдра в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $A = (2019, 1, 1)$, $B = (1, 2020, 1)$, $C = (1, 1, 2021)$, $D = (0, 2, 1)$.

Задача 11. Найдите уравнение гиперплоскости, проходящей через точки $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 4, 1, 2)$ в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$.

Задача 12. Двумерная плоскость Π в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ проходит через точки $C = (1, 1, 0, 1)$, $D = (1, 1, 1, 1)$, $E = (1, 0, 1, 1)$. Определите в каком из следующих случаев прямая l и плоскость Π пересекаются, в каком — параллельны, и в каком — скрещиваются:

(а) прямая l проходит через точки $A = (1, 0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1, 0)$;

(б) прямая l проходит через точки $A = (1, 0, 0, 1)$, $B = (1, 2, 2, 1)$;

(в) прямая l проходит через точки $A = (0, 0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1, 2)$.

Задача 13. ($\star$) В настольной игре Сет у каждой карточки есть четыре признака (цвет, форма, количество, заполнение), причём каждый признак принимает три значения. Три карточки образуют сет, если по каждому признаку они либо все одинаковы (например, одного цвета), либо все разные (например, никакие две не совпадают по цвету). Покажите, что можно отождествить карточки с точками в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ над полем $\mathbb{F}_3$ из трёх элементов так, что каждые три карточки, составляющие сет, будут лежать на одной прямой. Какимим уравнениями задаются прямые, соответствующие сетам на фотографиях?