Геометрия, 2-й модуль 2020 г.

Листок 2. Нестандартная линейная алгебра

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек a_0, $a_1,\ldots,$ $a_n \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a_0),\ f(a_1),\ldots,\ f(a_n))$.

Задача 2. Имеется 7 одинаковых банок, каждая из которых на $\frac{9}{10}$ заполнена краской, причём в каждой банке — свой цвет, и все цвета разные. Можно ли, переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое), получить хотя бы в одной из банок смесь, в которой все 7 красок смешаны в равной пропорции? (Выливать краску куда-либо, кроме банок, нельзя.)

Задача 3 (Формула Тейлора)**.** Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a),\ f'(a),\ldots,\ f^{(n)}(a))$. (Через $f^{(i)}$ обозначается i-тая производная многочлена f, то есть результат i-кратного применения к f оператора дифференцирования.)

Задача 4. Вокруг эллипсоида $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}$ (где $a,\ b,\ c > 0$) описан прямоугольный параллелепипед. Найдите длину пространственной диагонали этого параллелепипеда. Решение должно работать для всех возможных параллелепипедов, а не только для тех, чьи рёбра параллельны координатным осям. Можно без доказательства пользоваться тем, что вектор нормали эллипсоида в точке (x_0, y_0, z_0) имеет координаты (ax_0, by_0, cz_0).

Задача 5. Определим *кватернионы* $\mathbb{H}$ как векторы (a, b) на координатной плоскости $\mathbb{C}^2$. Умножение на кватернион (a, b) слева задаётся матрицей:

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

(а) Определим длину $|(z, w)|$ вектора в $\mathbb{C}^2$ по формуле

$$|(z, w)| = \sqrt{z\bar{z} + w\bar{w}}.$$

Докажите, что умножение на кватернион слева является гомотетией на $\mathbb{C}^2$, то есть, увеличивают все длины векторов в одинаковое число раз (квадрат этого числа называется *нормой* кватерниона).

(б) Докажите, что в $\mathbb{H}$ выполняются все аксиомы поля, кроме коммутативности умножения.

Задача 6. Отождествим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с множеством *мнимых кватернионов*, то есть, операторов из $\mathbb{H}$ со следом нуль. Определим длину вектора $q \in \mathbb{R}^3$ как корень из нормы кватерниона q. Для каждого кватерниона q определим преобразование I_q пространства $\mathbb{R}^3$ по формуле

$$I_q : v \mapsto qvq^{-1}.$$

Проверьте корректность этого определения и докажите, что I_q является поворотом.

Задача 7. Определим *октавы* или *числа Кэли* $\mathbb{O}$ как векторы (a, b) на (некоммутативной) плоскости $\mathbb{H}^2$. Умножение на октаву (a, b) слева задаётся матрицей:

$$\begin{pmatrix} L_a & -R_{\bar{b}} \\ R_b & L_{\bar{a}} \end{pmatrix},$$

где L_h, R_h, соответственно, обозначают операторы левого и правого умножения на кватернион h в $\mathbb{H}$. Докажите, что в $\mathbb{O}$ выполняются все аксиомы поля, кроме коммутативности и ассоциативности умножения.