Задачи для подготовки к экзамену

Геометрия, осенний семестр 2020 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

1. Матрицы, векторные пространства и линейные операторы

1.1. **Матрицы и системы линейных уравнений.** Если не оговорено обратное, то здесь и далее все векторные пространства и уравнения рассматриваются над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Задача 1. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^n$$

для всех натуральных n. Через i в этой задаче и в задаче 37 обозначается мнимая единица в поле комплексных чисел.

Задача 2. Приведите к стандартному ступенчатому виду “таблицу умножения”, то есть, матрицу 10×10, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит стоит ij.

Задача 3. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. (а) Докажите, что если $m \times n$-матрица A получается из матрицы A' элементарными преобразованиями строк, то системы из m однородных линейных уравнений на n неизвестных $AX = 0$ и $A'X = 0$ эквивалентны (то есть имеют одно и то же множество решений).

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для систем неоднородных линейных уравнений.

Задача 5. Найдите линейную зависимость между строками матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Докажите, что если $m\times n$-матрица A' получается из матрицы A заменой i-той строки на сумму i-той и j-той строки, то $A' = (I_m + E_m^{ij})A$, где I_m — единичная $m\times m$-матрица, а E_m^{ij} — матрица того же размера с единственным ненулевым элементом (равным 1) на пересечении i-той строки и j-того столбца.

Задача 7. Найдите матрицу обратную относительно умножения к матрице

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. (а) При каком условии на коэффициенты 2×2-матрица имеет обратную?

(б) Тот же вопрос для 3×3-матрицы.

Задача 9. Пусть A — квадратная матрица. Докажите, что следующие три условия эквивалентны.

(1) Матрицу A можно перевести в единичную матрицу элементарными преобразованиями строк.

(2) Матрица A имеет обратную относительно умножения.

(3) Система линейных уравнений $AX = 0$ имеет только нулевое решение.

Задача 10. Вычислите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. Пусть A и B — матрицы размера $m\times n$ и $n\times k$, соответственно. Докажите неравенство на ранги:

$$\text{rk } AB \le \min\{\text{rk } A, \text{rk } B\}.$$

Задача 12. Пусть A и B — квадратные матрицы. Докажите неравенство на ранги:

$$\text{rk}(A+B) \le \text{rk}(A) + \text{rk}(B).$$

Задача 13. В десяти копилках лежат 1, 2, 3,. . . , 10 монет. Разрешается добавлять по монете во все копилки, кроме одной. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, получить во всех копилках одинаковое количество монет?

Задача 14. (а) На ребрах тетраэдра написаны числа $b_1, \dots, b_6$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \dots, b_6$, для которых задача имеет решения.

(б) На вершинах куба написаны числа $b_1, \dots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число на каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \dots, b_8$, для которых задача имеет решения.

Задача 15. Клетки прямоугольной таблицы заполнены числами так, что каждое число является средним арифметическим чисел в четырёх соседних клетках (соседние=имеющие общую сторону). Можно ли восстановить числа во внутренних клетках таблицы по числам в граничных клетках?

Задача 16 ($\star$). На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

Задача 17 ($\star$). (а) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров другого стада. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если убрать условие, что вес коровы — целое число?

(в) Найдите ранг $(2n+1)\times(2n+1)$ матрицы, у которой на диагонали стоят нули, а все остальные коэффициенты равны либо 1, либо -1, причём сумма коэффициентов в каждой строке равна нулю.

1.2. **Векторные пространства.**

Задача 18. Докажите, что любые 3 вектора в $\mathbb{R}^2$ линейно зависимы.

Задача 19. В n-мерном пространстве даны $n+2$ вектора $v_1,\ldots,v_{n+2}$. Докажите, что можно найти такие скаляры $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+2}$ не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+2} v_{n+2} = 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+2} = 0.$$

Задача 20. Какие из следующих подмножеств являются вещественными подпространствами в $\mathbb{R}[x]$?

(а) $\{f \mid f(1) = 2\}$; (б) $\{f \mid f(1) = 0\}$; (в) $\{f \mid f$ делится на $(x^2+1)\}$.

Задача 21. Какие из следующих подмножеств являются комплексными подпространствами в $\mathbb{C}^2$?

(а) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$; (б) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = y\}$.

Задача 22. Являются ли линейно зависимыми над $\mathbb{R}$ векторы

(а) $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,3,4) \in \mathbb{R}^3$? (б) $(1,2,3,5)$, $(2,3,5,8)$, $(3,4,7,11) \in \mathbb{R}^4$?

Задача 23. Докажите, что для каждой пары подпространств U и V в векторном пространстве выполнено тождество, аналогичное формуле включений-исключений для множеств:

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

Задача 24. Пусть $(e_1,\ldots,e_n)$ и $(f_1,\ldots,f_n)$ два базиса в одном и том же векторном пространстве, а C — матрица перехода между ними, а именно:

$$(f_1,\ldots,f_n) = (e_1,\ldots,e_n)C.$$

Обозначим через x столбец координат некоторого вектора в первом базисе, а через y — столбец координат этого же вектора во втором базисе. Докажите, что

$$y = C^{-1}x.$$

Задача 25. Постройте базис над $\mathbb{R}$ в пространстве всех кососимметрических $n \times n$-матриц с вещественными коэффициентами. (Матрица $B = (b_{ij})_{1\le i,j,\le n}$ называется *кососимметрической*, если $b_{ij} = -b_{ji}$ для всех i и j.)

Задача 26. Пусть V — векторное пространство $n\times n$ матриц. Докажите, что каждая линейная функция f на V представляется в виде:

$$f(X) = \operatorname{tr}(AX)$$

для некоторой матрицы A. (Через $\operatorname{tr}(B)$ обозначается след матрицы B, то есть сумма элементов на её главной диагонали.)

Задача 27. Можно ли представить $\sqrt[3]{4}$ как линейную комбинацию $a + b\sqrt[3]{2}$, где a и b — рациональные числа?

Задача 28. Представляется ли многочлен $1+x+x^2+x^3$ в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами многочленов

(а) $x+1$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$? (б) $x-1$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$?

Задача 29. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0,1]$.

(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

Задача 30. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

(а) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt{2}$, $1/(\sqrt{2}-1)$?

(б) Выразите вектор $(1+\sqrt{2})/(3-2\sqrt{2})$ как линейную комбинацию векторов 1 и $\sqrt{2}$.

(в) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt[3]{2}$, $1/(\sqrt[3]{2}-1)$?

(г) Можно ли выразить вектор $1/(\sqrt[3]{2}-1)$ как линейную комбинацию векторов 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}^2$?

Задача 31. Чему равна размерность поля комплексных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над полем

(а) рациональных чисел; (б) вещественных чисел; (в) комплексных чисел?

Задача 32. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$, если:

(а) x^2-2; (б) x^3-2; (в) x^4+4; (г) x^4+1; (д) x^4-2.

Задача 33. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Найдите число всех подпространств в координатной векторной плоскости $\mathbb{F}_q^2$.

Задача 34 (Формула Тейлора)**.** Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a),\ f'(a),\dots,\ f^{(n)}(a))$.

Задача 35 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек $a_0,\ a_1,\dots,\ a_n \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a_0),\ f(a_1),\dots,\ f(a_n))$.

Задача 36 ($\star$)**.** Пусть $U \subset \mathbb{F}_2^4$ — плоскость в 4-хмерном пространстве над полем из двух элементов. Найдите количество таких плоскостей $V \subset \mathbb{F}_2^4$, что $U \cap V = \{0\}$.

1.3. **Линейные операторы.**

Задача 37. (а) Покажите, что векторы 1 и i образуют базис в поле комплексных чисел, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$.

(б) Выпишите матрицу оператора умножения на комплексное число $a+bi$ в базисе $\{1, i\}$.

Задача 38. Найдите два линейных оператора T и U на $\mathbb{R}^2$, такие что $TU = 0$, но $UT \neq 0$.

Задача 39. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор сдвига $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(x+a).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 40. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α. Найдите базис в $\mathbb{Q}(\alpha)$ (рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{Q}$), если:

(а) $\alpha = i$; (б) $\alpha = \sqrt[3]{2}$; (в) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; (г) $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$; (д) $\alpha = \pi$

Выпишите матрицу оператора умножения на α в найденном базисе.

Задача 41. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 42. Пусть A_1 и A_2 — две матрицы одного и того же оператора (в разных базисах) на n-мерном пространстве. Докажите, что существует обратимая $n \times n$-матрица P, такая что

$$A_2 = PA_1P^{-1}.$$

Задача 43. Найдите ядро и образ линейного оператора $T : \mathbb{F}^5 \mapsto \mathbb{F}^4$, заданного матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 17 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

Задача 44. Для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^3$ найдите ядро и образ оператора:

$$T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad T : u \mapsto [u, a].$$

Через $[u, v]$ обозначается векторное произведение векторов u, $v \in \mathbb{R}^3$.

Задача 45. Найдите ядро и образ оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше n. Напомним, что оператор дифференцирования — это оператор, который сопоставляет многочлену $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ его производную $f' := na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

2. Определители, аффинная и евклидова геометрия

2.1. **Определители.**

Задача 46. Целые числа 1798, 2139, 3255, 4867 делятся на 31. Без всяких вычислений покажите, что определитель четвёртого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

также делится на 31.

Задача 47. Найдите явную формулу для коэффициентов матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}.$$

Задача 48. Покажите, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

является квадратом многочлена от a, b, c и d.

Задача 49. Найдите определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Задача 50. Найдите определитель матрицы размера $2n \times 2n$, у которой на главной диагонали стоят числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}$, на побочной диагонали — числа $\mu_1,\ldots,\mu_{2n}$, а в остальных местах — нули. (Главная диагональ квадратной матрицы идёт из левого верхнего угла в правый нижний, а побочная — из левого нижнего угла в правый верхний.)

Задача 51. (а) Обозначим через $\mathbb{Z}^2$ решётку векторов с целыми координатами в $\mathbb{R}^2$. Пусть $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейный оператор, такой что его матрица в стандартном базисе имеет целые коэффициенты. Докажите, что отображение $T|_{\mathbb{Z}^2} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ является биекцией тогда и только тогда, когда $\det(T) = \pm 1$.

(б) На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

Задача 52. Для каких простых чисел $p \in \mathbb{N}$ система сравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 0 \pmod p \\ 2x + 3y + z \equiv 0 \pmod p \\ 3x + y + 2z \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

имеет ненулевое решение?

Задача 53 ($\star$). Вычислите определитель $n \times n$ матрицы, у которой на диагонали стоят числа $1+\mu_1,\ldots, 1+\mu_n$, а вне диагонали — единицы.

Задача 54 ($\star$). Найдите определитель $n \times n$ матрицы, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит $i + j$, если $i \neq j$ и $i + j + \mu_i$, если $i = j$.

2.2. **Аффинные пространства.**

Задача 55. Найдите уравнение гиперплоскости в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$, проходящей через точки $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 4, 1, 2)$.

Задача 56. Опишите все случаи взаимного расположения плоскости и прямой в четырёхмерном аффинном пространстве.

Задача 57. Определите тип коники (эллипс, гипербола, парабола, пара прямых,...):

(а) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;

(б) $4x^2 + 6xy + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$;

(в) $-10x^2 + 6xy - y^2 + 4x + y + 2 = 0$.

Задача 58. Определите тип квадрики $x^2+4xy+2xz+z^2+3x+z-6=0$ (эллипсоид, однополостный или двуполостный гиперболоид,...).

Задача 59. В настольной игре Сет у каждой карточки есть четыре признака (цвет, форма, количество, заполнение), причём каждый признак принимает три значения. Три карточки образуют сет, если по каждому признаку они либо все одинаковы (например, одного цвета), либо все разные (например, никакие две не совпадают по цвету). Покажите, что можно отождествить карточки с точками в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ над полем $\mathbb{F}_3$ из трёх элементов так, что каждые три карточки, составляющие сет, будут лежать на одной прямой.

Задача 60. Считая, что объём единичного целочисленного кубика равен единице, выразите объём n-мерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами в точках целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ через число целых точек, находящихся строго внутри самого Π, строго внутри его $(n-1)$-мерных граней, строго внутри $(n-2)$-мерных граней и т.д.

Задача 61 ($\star$). Все вершины параллелепипеда в трёхмерном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что внутри него есть ровно 9 целочисленных точек.

2.3. **Евклидовы пространства.** Во всех задачах этого раздела дело происходит в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, и через $(x_1,\dots,x_n)$ обозначены координаты в некотором ортонормированном базисе.

Задача 62. Докажите, что площадь $|\omega(u,v)|$ параллелограмма, натянутого на векторы u и v можно считать по формуле:

(а)
$$|\omega(u,v)| = \sqrt{\det\begin{pmatrix}(u,u) & (u,v)\\ (v,u) & (v,v)\end{pmatrix}}.$$

(б)
$$|\omega(u,v)| = |u||v||\sin\varphi|.$$

Задача 63. Докажите неравенство Коши–Буняковского–Шварца в $\mathbb{R}^n$:
$$|(u,v)| \le ||u||\cdot||v||.$$

Задача 64. Найдите ортогональный базис в подпространстве:
(а) заданном уравнением $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$;
(б) порождённом векторами $(1,2,2,-1)$, $(1,1,-5,3)$, $(3,2,8,-7)$;
(в) в ортогональном дополнении к предыдущему подпространству.

Задача 65. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ — гиперплоскость, натянутая на векторы $(1,2,3,1)$, $(1,2,3,2)$ и $(1,1,1,1)$.
(а) Найдите вектор единичной длины, перпендикулярный гиперплоскости Π.
(б) Найдите расстояние от точки $(6,3,6,5)\in\mathbb{R}^4$ до гиперплоскости Π.
(в) Найдите длину ортогональной проекции вектора $(6,3,6,5)$ на гиперплоскость Π.

Задача 66. Найдите расстояние от точки $p=(2,1,-3,4)$ до плоскости $\Pi=\{2x_1-4x_2-8x_3+13x_4+19=0,\ x_1+x_2-x_3+2x_4-1=0\}$

Задача 67. Найдите косинус угла между вектором $(1,2,3,4)$ и подпространством $\{x_1+x_2+x_3+x_4=1\}$.

Задача 68. Найдите расстояние между плоскостями $\Pi_1=\{x_1+x_3+x_4-2x_5-2=0,\ x_2+x_3-x_4-x_5-3=0,\ x_1-x_2+2x_3-x_5-3=0\}$; $\Pi_2=(1,-2,5,8,2)+\langle(0,1,2,1,2),(2,1,2,-1,1)\rangle$.

Задача 69. Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

Задача 70. Докажите, что поворот R в $\mathbb{R}^3$ на угол φ (против часовой стрелки) относительно оси, порождённой единичным вектором e, задаётся формулой:

$$R(v)=(1-\cos\varphi)(v,e)e+\cos\varphi\ v+\sin\varphi\ [e,v].$$

Задача 71. Найдите матрицу поворота в $\mathbb{R}^3$:
(а) на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x_1=x_2=x_3\}$;
(б) на угол φ относительно прямой $\{x_1=x_2=x_3\}$;
(в) на угол φ относительно прямой $\{x_1=px_2=qx_3\}$, где $p,q\neq 0$.

Задача 72. (а) Как выглядят матрицы операторов из группы $SO_2(\mathbb{R})$ в ортонормальном базисе?
(б) Как выглядят матрицы операторов из группы $O_2(\mathbb{R})$ в ортонормальном базисе?
(в) Классифицируйте все движения евклидовой аффинной плоскости.

Задача 73. Пусть $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — оператор на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а A — его матрица в некотором ортономированном базисе. Докажите, что T сохраняет расстояния тогда и только тогда, когда $AA^t=I$.

Задача 74. Пусть $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — движение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Покажите, что в некотором ортономированном базисе матрица оператора T будет блочно-диагональной с 1×1 или 2×2 блоками вида:

$$\begin{pmatrix}1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

(а) при $n=2$; (б) при $n=3$; (в*) при произвольном n.

Задача 75. ($\star$) Найдите максимальную площадь равностороннего треугольника, который можно разместить (нестрого) внутри единичного куба.

Задача 76. ($\star$) Докажите, что для каждого обратимого оператора A в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ найдётся такой ортогональный базис $v_1,\dots,v_n$, что базис $Av_1,\dots,Av_n$ тоже ортогонален.