Геометрия, 2-й модуль 2020 г.

Семинары 18-19. Евклидова геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Стандартное скалярное произведение векторов $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задаётся формулой:

$$(u, v) = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n.$$

Длина вектора u определяется формулой:

$$||u|| = \sqrt{(u, u)}.$$

Косинус угла между векторами u и v определяется формулой

$$\cos(\widehat{uv}) = \frac{(u, v)}{||u|| ||v||}.$$

Задача 1. (а) Линейное отображение $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ евклидовой плоскости в себя в стандартном базисе задаётся матрицей A. Докажите, что T является изометрией (=движением) тогда и только тогда, когда $AA^t = I$.

(б) Пусть $O_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$ — ортогональная группа, а $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ — специальная ортогональная группа. Покажите, что $A \in SO_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда A — это матрица поворота.

(в) Чему может быть равен определитель матрицы $A \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$?

(г) Матрицей какого движения может быть $A \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$?

Задача 2. (а) Найдите косинус угла между векторами $(1, 2)$ и $(1, 1)$ в $\mathbb{R}^2$.

(б) Найдите косинус угла между векторами $(1, 2, 3)$ и $(1, 1, 1)$ в $\mathbb{R}^3$.

Задача 3. (а) Ранее мы определили ориентированную площадь $\mathrm{area}(u, v)$ параллелограмма, натянутого на векторы u, $v \in \mathbb{R}^2$ формулой:

$$\mathrm{area}(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Теперь мы определили косинус угла между векторами через скалярные произведения. Выполняется ли при таких определениях следующая формула для площади из школьной геометрии:

$$|\mathrm{area}(u, v)| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot |\sin \varphi|?$$

(б) Докажите неравенство Коши–Буняковского–Шварца в $\mathbb{R}^2$:

$$|(u, v)| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Выведите из неравенства, что $|\cos \widehat{uv}| \leq 1$.

Задача 4. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, натянутая на векторы $(1, 2, 3)$ и $(1, 1, 1)$, и проходящая через начало координат.

(а) Найдите вектор единичной длины, перпендикулярный плоскости Π.

(б) Найдите расстояние от точки $(3, 4, 6) \in \mathbb{R}^3$ до плоскости Π.

Задача 5. (а) Найдите площадь параллелограмма, натянутого на векторы $(1,0,1)$, $(0,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

(б) Покажите, что площадь параллелограмма, натянутого на векторы u, $v \in \mathbb{R}^3$ можно вычислить по формуле:

$$|\mathrm{area}(u,v)| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,v) \\ (u,v) & (v,v) \end{pmatrix}}.$$

(в) Докажите, что формула из пункта (б) верна в евклидовом пространстве произвольной размерности.

Задача 6. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 в $\mathbb{R}^3$, где l_1 проходит через точку $(-2,1,4)$ и натянута на вектор $(0,2,-3)$, а l_2 проходит через точку $(0,1,-4)$ и натянута на вектор $(1,-2,6)$.

Задача 7. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, порождённая векторами $(1,1,-2)$ и $(3,-4,1)$, и содержащая точку $(1,1,1)$.

(а) Задайте плоскость Π уравнением.

(б) Найдите ортогональное дополнение к плоскости Π.

(в) Найдите расстояние от точки $(2,3,4)$ до плоскости Π.

(г) Найдите длину ортогональной проекции вектора $(1,2,3)$ на плоскость Π.

Задача 8 (Винберг, пример 2.4.8)**.** Выразите объём параллелепипеда в $\mathbb{R}^3$, натянутого на векторы a, b и c через длины его рёбер $||a||$, $||b||$ и $||c||$ и двугранные углы $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ac}$.

Задача 9. Найдите расстояние от точки $p = (2,1,-3,4)$ до плоскости $\Pi = \{2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 + 19 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0\}$ в $\mathbb{R}^4$.

Задача 10. Найдите косинус угла между вектором $(1,2,3,4)$ и подпространством $\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$ в $\mathbb{R}^4$.

Задача 11. Найдите расстояние между плоскостью Π и прямой l в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, если

$$\Pi = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3 = 0\};$$
$$l = (1,-2,5,8) + \langle (0,1,2,1) \rangle.$$

Задача 12. Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

Задача 13 ($\star$)**.** Докажите, что у 100-мерного апельсина радиусом 6см с толщиной кожуры 3мм съедобная часть составляет меньше одного процента объема.