Геометрия, 2-й модуль 2020 г.

Семинары 20-21. Ортогональные преобразования

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для запоминания. Ортонормальный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ — это такой базис $(e_1, \ldots, e_n)$, что $(e_i, e_i) = 1$ для всех $i = 1,\ldots, n$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Ортогональное преобразование — это линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое сохраняет расстояния.

Ортогональное дополнение $U^{\perp}$ к векторному подпространству $U \subset \mathbb{R}^n$ состоит из всех таких векторов $v \in \mathbb{R}^n$, что $(v, u) = 0$ для всех $u \in U$.

Задача 1 (Теорема косинусов)**.** Вычислите скалярное произведение (u, v) векторов в $\mathbb{R}^n$, если даны длины векторов u, v и $u + v$.

Задача 2. (а) Докажите, что если вектор v имеет координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ в некотором ортонормированном базисе, то $||v|| = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

(б) Докажите, что линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ортогонально тогда и только тогда, когда оно переводит *каждый* ортонормированный базис в ортонормированный базис.

(в) Докажите, что линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ортогонально тогда и только тогда, когда переводит *какой-нибудь* ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Задача 3. (а) Выпишите матрицу поворота относительно начала координат на угол φ против часовой стрелки в данном ортонормированном базисе на евклидовой плоскости.

(б) Выпишите матрицу отражения относительно прямой, заданной уравнением $\{ax_1 + bx_2 = 0\}$, в стандартном ортонормированном базисе.

(в) Используя, что поворот — это композиция двух отражений, придумайте способ генерировать повороты, матрицы которых (в ортонормированном базисе) имеют рациональные коэффициенты.

Задача 4. Докажите неравенство треугольника:

$$||u|| + ||v|| \leq ||u + v||$$

для векторов u и v

(а) на евклидовой плоскости; (б) в n-мерном евклидовом пространстве.

Задача 5. (а) Как выглядят матрицы операторов из группы $SO_2(\mathbb{R})$ в ортонормальном базисе?

(б) Как выглядят матрицы операторов из группы $O_2(\mathbb{R})$ в ортонормальном базисе?

(в) Классифицируйте все движения евклидовой аффинной плоскости.

Задача 6. Докажите, что для каждого подпространства $U \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

(а) $U \cap U^{\perp} = \{0\}$; (б) $U + U^{\perp} = \mathbb{R}^n$.

Задача 7. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — оператор на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а A — его матрица в некотором ортономированном базисе.

(а) Докажтие, что если T сохраняет расстояния, то

$$(u, v) = (T(u), T(v))$$

для любых двух векторов u и $v \in \mathbb{R}^n$.

(б) Докажите, что T сохраняет расстояния тогда и только тогда, когда $AA^t = A^tA = I$.

Задача 8. (а) Докажите, что поворот R трёхмерного евклидового пространства на угол φ (против часовой стрелки) относительно оси, порождённой единичным вектором e, задаётся формулой:

$$R(v) = (1 - \cos\varphi)(v, e)e + \cos\varphi\ v + \sin\varphi\ [e, v].$$

(б) Выпишите матрицу линейного отображения из пункта (а) в подходящем ортонормированном базисе.

Задача 9. (а) Выпишите матрицу отражения относительно плоскости, заданной уравнением $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, в подходящем ортонормированном базисе.

(б) Используя, что вращение трёхмерного евклидового пространства — это композиция двух отражений, придумайте способ генерировать вращения, матрицы которых (в ортонормированном базисе) имеют рациональные коэффициенты.

Задача 10. Подпространство $U \subset \mathbb{R}^4$ задано следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

Напишите систему уравнений, задающую ортогональное дополнение к U.

Задача 11. Найдите ортонормированный базис в подпространстве:

(а) заданном уравнением $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

(б) порождённом векторами $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$;

(в) в ортогональном дополнении к предыдущему подпространству.

Задача 12 (Метод наименьших квадратов)**.** (а) Путём экспериментов Буратино обнаружил зависимость между количеством посаженных монет n и урожаем $f(n)$. А именно, $f(1) = 4$, $f(2) = 11$, $f(3) = 13$, $f(4) = 18$. Найдите такую линейную функцию $l(x) = ax + b$, что сумма квадратов

$$\sum_{i=1}^{4} (f(i) - l(i))^2$$

минимальна.

(б) Плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ натянута на векторы u_1 и u_2. Для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно лежащего в Π) найдите такую линейную комбинацию $v_0 = au_1 + bu_2$, что длина разности векторов $v - v_0$ минимальна.

(в) На плоскости даны n точек $p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_n = (x_n, y_n)$, где $x_1 < \ldots < x_n$. Найдите такую прямую $l = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$, что сумма квадратов $(ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$ минимальна (иными словами, прямая l наименее уклоняется от точек $p_1, \ldots, p_n$).