Экзамен, вариант I

Геометрия, осенний семестр 2020 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Фамилия и имя студента:

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Итог
Оценка									

Продолжительность экзамена — 3 часа. На полный балл достаточно решить любые 6 задач (всего задач 8). Нельзя пользоваться никакими интерактивными онлайн ресурсами.

Задача 1. Веб-дизайнер Петя сначала параллельно перенёс квадрат $\{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ на вектор $(1,1)$, потом повернул на 90° против часовой стрелки относительно начала координат, потом результат растянул по оси x в три раза, а по оси y — в два раза, и наконец повернул на 90° по часовой стрелке относительно начала координат. Запишите Петино преобразования в виде $(x,y) \mapsto (ax+by+e, cx+dy+f)$ для некоторых вещественных констант a, b, c, d, e и f.

Задача 2. Будем рассматривать $\mathbb{R}$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Пусть $V \subset \mathbb{R}$ — подпространство, порождённое векторами 1, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{4}$. Определим линейный оператор $T : V \to V$ формулой

$$T(a) = a \cdot (\sqrt[3]{2} - 1).$$

Предъявите базис в пространстве V и выпишите матрицу оператора T в этом базисе.

Задача 3. Найдите ядро, образ и ранг оператора $T : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, который в некотором базисе записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}.$$

(В качестве ответа нужно выписать либо уравнения, либо порождающий набор векторов в том же самом базисе.)

Задача 4. Вычислите определитель 4×4-матрицы

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Найдите косинус угла между гиперплоскостью Π и вектором v в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$, если

$$\Pi = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\};$$

$$v = (1, -2, 5, 8).$$

Задача 6. Найдите площадь параллелограмма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, натянутого на векторы u и v, если

$$u = (1, 3, -1, 2);$$
$$v = (1, -2, 5, 1).$$

Задача 7. Все вершины параллелепипеда в трёхмерном вещественнном пространстве имеют целочисленные координаты. При этом на его рёбрах и гранях нет других целочисленных точек, кроме вершин. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что строго внутри него есть ровно 11 целочисленных точек. (Объём единичного куба равен единице.)

Задача 8. Найдите количество всех прямых в аффинной плоскости $\mathbb{F}_3^2$ над полем из трёх элементов.